FONDO PIZZOFALCONE

ZIONALE
Prov.
VII
397
APOLI
VITT. EM. III

29 - F - 32

BIBLIOTECA PROVINCIALE
Armadio VIII
Palchetto D
Num.° d' ordine 847

Digitized by Google

97
6
13

B. Pur
VII
397

Digitized by Google

641026

METHODE

POUR

LA MESURE DES SURFACES,

LA DIMENTION DES SOLIDES,

LEURS CENTRES DE PESANTEUR,

DE PERCUSSION ET D'OSCILLATION.

Par l'Application du Calcul intégral.

Par M. CARRÉ, de l'Académie Royale des Sciences.

A PARIS,
Chez DURAND, Libraire, rue Saint Jacques, à S. Landry & au Griffon.

M. D'C C. L.

AVEC APPROBATION ET PERMISSION.

Digitized by Google

PREFACE.

JAMAIS on n'a tant cultivé les Sciences que dans le ſiécle où nous ſommes, & l'on peut dire que jamais on n'y a fait tant de progrès, ſurtout dans les Mathématiques, qui ont fait de tout tems l'étude des Eſprits les plus ſublimes. Auſſi ſont-elles portées à un tel dégré de perfection, qu'il faudra dans la ſuite être un homme d'un génie rare & extraordinaire pour y faire de nouvelles découvertes. La plus belle qu'on ait faite juſqu'à préſent eſt ſans doute le *Calcul différentiel*, qui conſiſte comme l'on ſçait à deſcendre des grandeurs à leurs différences

infiniment petites pour en découvrir leurs rapports, & par ces rapports ceux des grandeurs dont elles ſont les différences. Il paroît que l'on a découvert tout ce qu'on pouvoit ſouhaiter ſur ce calcul, comme il eſt facile de le voir par le ſçavant Livre * de l'illuſtre *M. le Marquis de l'Hôpital.* Mais il en reſte un autre qu'on appelle *Calcul intégral*, qui conſiſte à remonter aux grandeurs, c'eſt-à-dire à trouver la ſomme de leurs différences. Ce calcul renferme de grandes difficultés; & l'on peut dire qu'il eſt auſſi difficile de trouver l'intégrale d'une différentielle dans une infinité de cas, qu'il eſt facile de prendre la différentielle d'une intégrale quelconque. Il m'a paru même en le tentant dans beaucoup d'exemples, qu'il n'étoit pas aiſé de connoître ſi certaines quantités ſont intégrables, à cauſe des termes qui ſe ſont évanoüis en *différentiant*, & qu'on eſt quelquefois obligé de retrouver en *intégrant*, & pour d'autres raiſons qui ne ſont pas de ce lieu; & j'oſe aſſurer que ſi l'on pouvoit trouver des régles générales de ce calcul comme on en a pour le différentiel, l'on n'auroit plus rien à déſirer dans les Mathématiques, ce qui paroîtra ſans doute

* *Analyſe des Infiniment Petits.*

un paradoxe à ceux qui n'en connoiſſent pas l'étenduë.

Je ne doute pas que pluſieurs perſonnes ne travaillent ſur cette matiere, & qu'on n'y ait déja fait un grand nombre de découvertes; mais je ſuis perſuadé qu'il en reſte encore beaucoup plus à trouver; car il n'eſt pas poſſible d'épuiſer une ſcience ſi vaſte & ſi profonde, qui peut ſervir à réſoudre d'une maniére infiniment générale tous les plus fameux problêmes, ou qui ont été déja trouvés par d'autres méthodes, ou qu'on trouvera dans la ſuite; comme la Méthode inverſe des tangentes, c'eſt-à-dire, la maniere de connoître la nature des courbes, dont on a l'expreſſion des ſou-tangentes, la Rectification des courbes, la Quadrature des eſpaces, la Dimenſion des ſolides, les Centres de peſanteur, de percuſſion, d'oſcillation &c. J'applique ici le *Calcul intégral* pour déterminer la valeur de quelques ſurfaces, la Dimenſion des ſolides, leurs Centres de peſanteur, de percuſſion & d'oſcillation. Je ne prétens pas dire beaucoup de choſes nouvelles. Car outre que je ne donne pas les régles de ce calcul, lorſque la quantité propoſée dont on veut avoir l'in-

tégrale, n'eſt point le produit d'une différentielle par le multiple de ſon abſoluë élevée à une puiſſance quelconque, je ne l'étens point aux courbes tranſcendantes. Je laiſſe cela aux Maîtres de l'Analyſe qui ont plus de tems & plus d'étenduë d'eſprit que je n'en ai pour pénétrer dans les Mathématiques abſtruſes, & qui peut-être ne voudroient pas deſcendre dans de petits détails qui ſont ſi néceſſaires à ceux qui commencent, & c'eſt en partie ce qui m'a déterminé à travailler ſur ce ſujet. Cet Ouvrage auroit peut-être été beau il y a cinquante ans; mais ces Sciences ont été pouſſées ſi loin depuis ce tems-là, que l'on ne doit le regarder que comme un eſſai de l'application du *Calcul intégral* pour en faire voir la beauté & la fécondité, puiſqu'on découvre par là avec une facilité merveilleuſe des choſes que l'on ne pourroit touver par la Géométrie ordinaire ſans beaucoup de travail & de peine, & peut-être quelques-unes ou elle ne pourroit atteindre. Et l'on s'en perſuadera aiſément ſi on prend garde au grand nombre de problèmes que l'on réſoud ici en peu de mots, & la plûpart d'une maniére ſi générale que tous les cas particuliers qui s'é-

tendent à l'infini y ſont renfermés, enſorte que l'on admirera ſans doute la ſimplicité de la méthode dont on ſe ſert. Si l'on ne fait pas toûjours de nouvelles découvertes, on doit du moins tâcher de perfectionner les anciennes, & c'eſt beaucoup que de les rendre plus faciles & plus générales; c'eſt même ce qui fait la beauté d'une méthode que ſa généralité: car les Géométres qui réſolvent leurs problêmes d'une maniére particuliére, ne rendent ſouvent guéres plus habiles ceux qui liſent leurs ſolutions. Ce petit Ouvrage ne ſera pas ſemblable à un de ceux d'un des plus célebres Mathématiciens de ce ſiécle, quoiqu'on y traite à peu près des mêmes choſes. Voici comme le *P. Pardies* en parle ★: *J'ai trouvé que cet Ouvrage* (de M. Wallis) *excellent en ſoit & admirable, eſt plus propre à contenter ceux qui ſont déja conſommés dans cette Science qu'à inſtruire ceux qui veulent l'apprendre. Car outre qu'il s'en faut bien qu'il ne comprenne tout, il eſt écrit d'une maniére ſi ſavante & ſi géometrique, qu'il y a fort peu de perſonnes capables de le comprendre.* Celui-ci au contraire ſera très-facile; car outre qu'il ſuppoſe peu de Géométrie, les calculs en ſont

★ *Préface de la Statique.*

aiſés. Il ſeroit pourtant bon d'avoir lû la premiére Section du Livre de *l'Analyſe des Infiniment Petits*. Ce Traité eſt diviſé en quatre Sections. On traitera dans la premiere de la Meſure des Surfaces. Dans la ſeconde, de la Dimenſion des Solides. On déterminera dans la troiſiéme leurs Centres de Peſanteurs. Et dans la quatriéme on parlera des Centres de Percuſſion & d'Oſcillation.

APPROBATION

APPROBATION.

J'AI lû par ordre de Monſeigneur le Chancelier un Livre qui a pour titre : *Méthode pour la Meſure des Surfaces, la Dimention des Solides, &c. par M. Carré:* dont il m'a paru que la réimpreſſion ſeroit utile au Public. A Paris ce 10 Mars 1749.

DE MONT-CARVILLE.

PERMISSION.

LOUIS; par la grace de Dieu, Roi de France & de Navarre : A nos amés & feaux Conſeillers les Gens tenans nos Cours de Parlemens, Maîtres des Requêtes ordinaires de notre Hôtel, Grand Conſeil, Prévôt de Paris, Baillifs, Sénéchaux, leurs Lieutenans Civils, & autres nos Juſticiers qu'il appartiendra, SALUT. Notre amé LAURENT DURAND, Libraire à Paris, Nous a fait expoſer qu'il déſireroit faire réimprimer & donner au Public un Livre qui a pour titre: *Méthode pour la Meſure des Surfaces, par M. Carré*, s'il Nous plaiſoit lui accorder nos Lettres de Permiſſions pour ce néceſſaire. A ces cauſes, voulant favorablement traiter l'Expoſant, Nous lui avons permis & permettons par ces Préſentes de faire imprimer ledit Livre en un ou pluſieurs volumes, & autant de fois que bon lui ſemblera, & de

le vendre, faire vendre & débiter par tout notre Royaume pendant le tems de trois années consécutives, à compter du jour de la datte des Présentes. Faisons defenses à tous Libraires, Imprimeurs & autres personnes de quelque qualité & condition qu'elles soient, d'en introduire d'impression étrangere dans aucun lieu de notre obéissance; à la charge que ces Présentes seront enregistrées tout au long sur le Régistre de la Communauté des Libraires & Imprimeurs de Paris dans trois mois de la datte d'icelles, que la réimpression dudit Livre sera faite dans notre Royaume & non ailleurs, en bon papier & beaux caracteres, conformément à la feuille imprimée attachée pour modéle, sous le contre-scel des Présentes; que l'Impétrant se conformera en tout aux Réglemens de la Librairie, & notamment à celui du 10 Avril 1725. qu'avant de l'exposer en vente, l'imprimé qui aura servi de copie à la réimpression dudit Livre, sera remis dans le même état ou l'approbation y aura été donnée ès mains de notre très-cher & féal Chevalier le Sieur Daguesseau, Chancelier de France, Commandeur de nos Ordres, & qu'il en sera ensuite remis deux Exemplaires dans notre Bibliothéque Publique, un dans celle de notre Château du Louvre, & un en celle de notredit très-cher & féal Chevalier le Sieur Daguesseau, Chancelier de France, le tout à peine de nullité des Présentes; du contenu desquelles vous mandons & enjoignons de faire jouir ledit Exposant & ses ayant cause plainement & paisiblement, sans souffrir qu'il leur soit fait aucun trouble ou empêchement. Voulons qu'à la copie des Présentes qui sera imprimée tout au long au commencement ou à la fin dudit Livre foi soit ajoutée comme à l'Original; commandons au premier notre Huissier ou Sergent sur ce requis de faire pour l'exécution d'icelles tous actes requis & nécessaires, sans demander autre permission, & nonobstant clameur de Haro, Charte Normande & Lettres à ce contraire. Car tel est notre plaisir. Donné à Paris le dix-neuviéme jour

du mois de Mars, l'an de grace mil ſept cent cinquante, & de notre Regne le trente-cinquiéme. Par le Roi en ſon Conſeil.

SAINSON.

Regiſtré ſur le Régiſtre XII. de la Chambre Royale des Libraires & Imprimeurs de Paris, N°. 401. Fol. 280. conformément aux anciens Réglemens, confirmés par celui du 28 Février 1723. A Paris le 12 Avril 1750.

T. LE GRAS, Syndic.

Digitized by Google

TABLE.

SECTION I. *De la Mesure des Surfaces*, pag. 1.

SECTION II. *De la Dimension des Solides*, 40.

SECTION III. *Des Centres de Pesanteur*, 70.

SECTION IV. *Des Centres de Percussion &c.* 103.

AVIS.

Quelqu'attention que l'on ait à corriger ces sortes d'Ouvrages, il y reste toûjours quelques fautes, & même de celles que l'on a corrigées : Ainsi on prie le Lecteur d'y avoir égard.

METHODE

METHODE

POUR

LA MESURE DES SURFACES,

LA DIMENSION DES SOLIDES,

LEURS CENTRES DE PESANTEUR,

DE PERCUSSION ET D'OSCILLATION.

SECTION PREMIERE.

DE LA MESURE DES SURFACES.

LES Géométres ont coûtume de conſidérer la plûpart des Surfaces comme compoſées d'une infinité de lignes paralleles droites ou courbes, qu'ils regardent comme autant de parallelogrammes, dont la largeur eſt infiniment petite, & les Solides comme compoſés d'une infinité de Surfaces auſſi paralleles droites ou courbes, qu'ils prennent pour autant de Solides qui ont pour hauteur une grandeur infiniment petite, & qui ſont les élé-

mens d'une figure propoſée. Ainſi concevant la hauteur d'une figure quelconque diviſée en une infinité de petites parties égales, on les regardera comme autant de differences que l'on exprimera par la characteriſtique d, & qui ſeront la largeur des parallelogrammes, ou la hauteur des Solides infiniment petits, qui compoſent une figure. Par exemple, dans l'eſpace parabolique $AMBD$, FIG. 1. ſi l'on conçoit que l'axe ou la hauteur AD ſoit diviſée en un nombre infini de parties égales, & qu'on mene par tous ces points de diviſion des ordonnés PM, pm, il eſt clair qu'elles rempliront l'eſpace; multipliant donc chacune de ces ordomées par une partie Pp infiniment petite de la hauteur AD, on formera autant de petites ſurfaces ou de petits parallelogrammes pM (car pm étant ſuppoſée infiniment proche de PM, le triangle MRm devient infiniment petit, & par conſéquent nul par rapport au parallelogramme pM. Il en faut dire autant de la portion de Solide décrite par ce triangle MRm dans la révolution de la figure) qui ſeront autant de *différentielles* de l'eſpace, & dont la ſomme vaut l'eſpace parabolique cherché. De même dans le Conoïde parabolique qui eſt un ſolide formé par la revolution de la demi-parabole AMB autour de l'axe AD, il eſt évident que toutes les ordonnées PM, pm décriront dans ce mouvement des ſurfaces circulaires, leſquelles étant multipliées par une partie Pp de la hauteur, donneront autant de petits Solides qui ſeront les differentielles ou les élemens qui compoſent le Solide entier, & dont la ſomme eſt égale au Solide cherché. Or pour avoir la ſomme ou ce qui eſt la même choſe, pour prendre l'*intégrale* de ces differentielles, il faut les exprimer en termes analytiques, & que les quantitez variables ſoient de même eſpece que la difference, ou au contraire. Par exemple, dans l'eſpace parabolique $AMBD$, nommant PM, y; & Pp, dx; on aura pour ſon élement differentiel $y\,dx$, qui eſt un produit de deux quantitez de differente eſpece; on ſubſtituera donc à la place de y ou de dx, leur valeur pour avoir

tout en y ou en x, puis on prendra l'integrale de la quantité qui en réſultera. Il en eſt de même pour les Solides.

Mais il eſt démontré que pour prendre la difference d'une quantité variable élevée à une puiſſance quelconque, il faut la multiplier par l'expoſant de la puiſſance & par ſa difference, & abaiſſer la puiſſance d'une unité, ainſi la difference de x^m eſt $m\,x^{m-1}\,dx$. Donc pour avoir l'intégrale d'une differentielle quelconque, il faut élever la quantité variable de la differentielle à une puiſſance plus grande de l'unité, & la diviſer par l'expoſant de cette puiſſance & par ſa difference. D'où l'on peut tirer cette regle.

REGLE GENERALE dont on ſe ſervira dans la réſolution des Problêmes ſuivans, pour trouver par le calcul, *l'intégrale* d'une differentielle.

On élevera la quantité variable de la differentielle à une puiſſance plus grande de l'unité, & on la diviſera par l'expoſant de cette puiſſance & par ſa difference. Car l'intégrale de la differentielle d'une puiſſance quelconque parfaite ou imparfaite eſt égale au quotient de cette quantité élevée à une puiſſance plus grande d'une unité diviſée par ſon expoſant & par ſa difference. Ainſi l'integrale de cette differentielle $m\,x^{m-1}\,dx$ ſera par la regle $\frac{m\,x^{m-1+1}\,dx}{m-1+1\times dx} = x^m$: m marque tout nombre entier ou rompu, poſitif ou négatif. Si $m = 3$, on aura $3\,x\,x\,dx$, dont l'intégrale $= x^3$; ſi $m = \frac{1}{3}$, on aura $\frac{1}{3}\,x^{\frac{1}{3}-1}\,dx = \frac{1}{3}\,x^{-\frac{2}{3}}\,dx$, dont l'integrale $= x^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{x}$. Si la differentielle étoit $\frac{1}{m}\,x^{\frac{1}{m}-1}\,dx$, ſon intégrale ſeroit $x^{\frac{1}{m}}$, &c.

On pourroit encore démontrer cette regle par induction ; dont voici quelques exemples.

Soit cette differentielle $y\,dx = \frac{b\,x\,dx}{a}$ qui eſt celle du

FIG. 2. triangle ABC, en nommant AP, x; PM, y. Son intégrale ſera par la regle $\frac{b x x}{2a} = \frac{xy}{2}$, en remettant y pour ſa valeur $\frac{bx}{a}$. Il faut donc démontrer que $\frac{xy}{2}$ eſt la ſomme des $y\,dx$.

Soit achevé le parallelogramme $ABCD$. Il eſt clair que le triangle ABC eſt égal à la ſomme des $y\,dx$, & le triangle ADC à celle des $x\,dy$; or la ſomme des $y\,dx$ plus celle des $x\,dy$ valent le parallelogramme entier $= xy$; donc par la géometrie ordinaire $\frac{xy}{2}$ = la ſomme des $y\,dx$; c'eſt à dire au triangle ABC. Ce qu'il falloit démontrer.

FIG. 3. Soit encore cette differentielle $y\,dx = x^{\frac{1}{m}}\,dx$ qui exprime l'élement infiniment petit de l'eſpace parabolique ABD. Il eſt clair que la ſomme de tous ces élemens vaut l'eſpace parabolique. Or par la regle cette ſomme ou l'intégrale de $x^{\frac{1}{m}}\,dx$ eſt égale à $\frac{m}{m+1}x^{\frac{1}{m}+1} = \frac{m}{m+1}xy$ en remettant pour $x^{\frac{1}{m}}$ ſa valeur y. Il faut donc prouver que $\frac{m}{m+1}xy$ eſt la ſomme des $y\,dx$.

Soit achevé le parallelogramme $ADBC$; il eſt clair que l'eſpace interieur ABD eſt égal à la ſomme de $y\,dx$, & l'exterieur ABC à celle des $x\,dy$. Mais par la méthode des tangentes $dy.\,dx :: y.\,t$; donc $y\,dx = t\,dy$: & dans la parabole $t = mx$; donc $y\,dx = m\,x\,dy$, d'où l'on tire $\frac{x\,dy}{y\,dx} = \frac{1}{m}$: or la ſomme des $y\,dx$ plus celle des $x\,dy$ valent le parallelogramme $ADBC = xy$; donc $\frac{\overline{S}y\,dx + \overline{S}x\,dy}{\overline{S}y\,dx} = \frac{xy}{\overline{S}y\,dx} = \frac{m+1}{m}$, parce que cette raiſon eſt conſtante; d'où l'on tire $\overline{S}y\,dx = \frac{m}{m+1}xy$; ce qu'il falloit démontrer.

PROPOSITION I.

PROBLEME.

1. TROUVER *la surface d'un triangle quelconque.*

Soit le triangle BAC; ayant abaissé du sommet A sur la base $BC = b$, une perpendiculaire $AD = a$, on menera une ligne quelconque MM parallele à BC, qu'on nomme y; & une autre infiniment proche $m\,m$; & supposant $AP = x$; $Pp = dx$; on aura $y\,dx =$ au petit espace $MMm\,m$ qui est la differentielle du triangle. Mais à cause des triangles semblables MAM, BAC, $x.y :: a.b$; d'où l'on tire $y = \frac{bx}{a}$: on aura donc $y\,dx = \frac{bx\,dx}{a}$, dont l'intégrale $= \frac{bxx}{2a} = MAM$; ce qui donne $\frac{ab}{2}$ pour la valeur du triangle BAC, parce que le point P étant en D, x devient $= a$. FIG. 3

PROPOSITION II.

PROBLEME.

2. TROUVER *la Surface d'un cercle.*

Soit le cercle $ADBE$; si l'on conçoit qu'un de ses rayons CA soit divisé en une infinité de parties égales, & que du centre par tous ces points on décrive des circonférences; il est évident qu'elles rempliront l'espace circulaire. Soit une de ces circonferences $PMQO$, & une autre infiniment proche $p\,m\,q\,o$. Ayant nommé la circonference de ce cercle, c; son rayon, r; sa partie CP, x; donc $Pp = dx$. Pour avoir la circonférence décrite par le point P, on fera $r.c :: x.\frac{cx}{r} =$ à la circonference $PMQO$, & multipliant par dx, on aura $\frac{cx\,dx}{r}$ pour la surface annulaire infiniment petite qui est la differentielle de l'espace; dont l'intégrale $= \frac{cxx}{2r} =$ à l'aire du cercle qui a pour FIG. 4

rayon CP ; ce qui donne pour celle du cercle entier $\frac{cr}{2}$, parce que P en A, x devient $= r$.

AUTRE MANIERE.

FIG. 5. 3. Ayant mené dans le cercle CAB deux rayons infiniment proches CA, CB, ils formeront un Secteur de cercle que l'on peut regarder comme un triangle rectiligne à cauſe de l'infinie petiteſſe de l'arc AB, dont la hauteur eſt le rayon même du cercle : nommant donc l'arc AB, dx; on aura * $\frac{r\,dx}{2}$ = au petit Secteur CAB dont l'integrale $= \frac{rx}{2} = \frac{rc}{2}$, lors que l'arc AB devient la circonference entiere $= c$.

* Art. 1.

COROLLAIRE.

4. Il eſt évident, 1°. que la ſurface d'un cercle eſt égale à un triangle qui auroit pour baſe la circonference développée, & pour hauteur le rayon de ce cercle. 2°. Que le quarré du diametre d'un cercle eſt à l'aire de ce cercle, comme le diametre eſt au quart de la circonference.

AVERTISSEMENT.

Il eſt bon d'avertir ici que c'eſt des priſmes, des pyramides, des cylindres & des cones droits que ſe doit entendre tout ce qu'on en va dire dans cet ouvrage.

PROPOSITION III.

PROBLEME.

FIG. 6. 5. TROUVER *la ſurface d'un Priſme.*

Il eſt évident que chaque face du priſme eſt un parallelogramme. Prenant donc la valeur de chacun de ces parallelogrammes, & en faiſant une ſomme, on aura la ſurface cherchée. Ainſi la ſurface d'un priſme eſt égale à un parallelogramme qui a pour hauteur celle du priſme, & pour baſe le circuit de la baſe du priſme.

PROPOSITION IV.

PROBLEME.

6. TROUVER *la ſurface d'une Pyramide réguliere.* FIG. 7.

Chaque face de la pyramide réguliere, eſt un triangle: prenant donc la valeur de chacun de ces triangles, & en faiſant une ſomme, on aura la ſurface cherchée. Ainſi la ſurface d'une pyramide eſt égale à un triangle dont la hauteur eſt égale à la hauteur d'un des triangles qui la compoſent, & la baſe égale à la moitié du circuit de la baſe de la pyramide.

COROLLAIRE.

7. Il eſt évident que la ſurface de la pyramide eſt à la ſurface du priſme de même baſe & de même hauteur qu'une des faces de la pyramide, comme 1 eſt à 2.

PROPOSITION V.

PROBLEME.

8. TROUVER *la ſurface d'un Cylindre.* FIG. 8.

On peut conſidérer la ſurface d'un Cylindre comme compoſée d'une infinité de circonférences égales, poſées les unes ſur les autres, ou d'une infinité de petits parallelogrammes qui ont pour baſe des portions de circonférences: Si donc on multiplie une de ces circonferences que je nomme *c*, par la hauteur du cylindre que j'appelle *a*, ou ce qui eſt la même choſe, un de ces petits parallelogrammes par la circonference, on aura *a c* pour la ſurface cherchée. Ainſi la ſurface d'un cylindre, ou une de ſes portions compriſe entre deux lignes droites, eſt égale à un parallelogramme qui a pour hauteur celle du cylindre, & pour baſe le circuit du cylindre, ou la portion de ce circuit compriſe entre ces deux droites.

Il en eſt de même de la ſurface d'un Solide quelconque

droit, dont la base n'est pas circulaire, mais elliptique, parabolique, hyperbolique, ou quelque autre ligne courbe que ce soit.

PROPOSITION VI.

PROBLEME.

FIG. 9. 9. TROUVER *la surface d'un Cone dont la Section par l'axe soit le triangle* B A C.

Soit du sommet A abaissée la perpendiculaire AD qui en sera l'axe. Si on conçoit que cette ligne soit divisée en une infinité de parties égales, & que de tous ces points on mene des perpendiculaires MP, mp, il est clair que le triangle rectangle ADB tournant sur l'axe AD, tous les points M, m décriront des circonferences qui formeront la surface du Cone; & pour avoir la somme de toutes ces circonferences, je raisonne ainsi, après avoir nommé le rayon de la base, r; la circonference, c; AD, a; AP, x, donc $Pp = dx$, PM, y, donc $mR = dy$, & $Mm = \sqrt{dx^2 + dy^2} : r.c :: y.\frac{cy}{r}$ = la circonference décrite par le point M, & $\frac{cy}{r}\sqrt{dx^2+dy^2}$ = la differentielle de la surface. Mais à cause des triangles semblables APM, ADB on aura $x.y :: a.r$, d'où l'on tire $x = \frac{ay}{r}$, & en prenant la difference $dx = \frac{a\,dy}{r}$, & $dx^2 = \frac{aa\,dy^2}{rr}$; mettant donc cette valeur dans $\frac{cy}{r}\sqrt{dx^2+dy^2}$ on aura $\frac{cy\,dy}{rr}\sqrt{rr+aa}$, dont l'integrale $= \frac{cyy}{2rr}\sqrt{rr+aa} = \frac{c}{2}\sqrt{rr+aa}$, lorsque P est en D, parce qu'alors $y = r$: Mais $\sqrt{rr+aa} = AB$ côté du Cone; donc la surface du Cone est égale à la circonference de la base multipliée par la moitié du côté.

AUTRE MANIERE.

10. On peut regarder la surface du Cone comme composée

posée d'une infinité de petits triangles qui ont pour base une portion de circonference, & pour hauteur le côté même du Cone : Si donc on prend la valeur d'un de ces petits triangles, & qu'on la multiplie par la circonference de la base du cone, on aura la surface cherchée. Ainsi cette surface est égale à un triangle qui a pour hauteur le côté du cone, & pour base la demie circonférence de la base du cone.

COROLLAIRE.

11. Il est clair 1°. Que la surface du cone est à la surface du cylindre de même base, & qui a pour hauteur le côté du cone, comme 1 est à 2.

2° Que la surface du cylindre qui a pour hauteur le rayon du cercle de sa base est à la surface de ce cercle comme 2 est à 1. Car la surface du cylindre $= cr$, & celle du cercle $= \frac{1}{2}cr$. De même la portion de surface du cylindre qui a pour base l'arc d'un Secteur, & pour hauteur le rayon, est à ce Secteur comme 2 est à 1.

3°. Donc ces surfaces cylindriques, coniques & circulaires, sont entr'elles comme 2, $\sqrt{2}$, & 1 ; & par conséquent elles sont continuellement proportionnelles.

PROPOSITION VII.

PROBLEME.

12. TROUVER *un cercle égal à la surface d'un cylindre donné.*

Soit la hauteur du cylindre $= a$, la circonference de la base $= c$, & son rayon $= r$, on aura ac pour la valeur de la surface ; soit de plus le rayon du cercle cherché $= y$; on dira $r. c :: y. \frac{cy}{r} =$ la circonference de ce cercle, qui sera * $= \frac{cyy}{2r} = ac$ par l'hypothese, d'où l'on tire $yy = 2ar$. Ainsi si l'on prend une moyenne proprotionnelle entre la hauteur du cylindre & le diametre de la base, elle sera le rayon du cercle cherché.

* *Art.* 2.

PROPOSITION VIII.

PROBLEME.

13. TROUVER *la ſurface d'un cylindre égale à un cercle donné.*

Comme la queſtion eſt indeterminée, on peut prendre pour la hauteur du cylindre ou pour la circonference de ſa baſe telle grandeur que l'on voudra.

Soit le cercle $= \frac{cr}{2}$, ayant pris a pour la hauteur du cylindre, & x pour la circonference de ſa baſe, on aura pour la ſurface $ax = \frac{cr}{2}$, d'où l'on tire $x = \frac{cr}{2a}$. On feroit le même raiſonnement ſi c'étoit la circonférence de la baſe qui fût donnée.

PROPOSITION IX.

PROBLEME.

14. TROUVER *un cercle égal à la ſurface d'un cone donné.*

Ayant nommé le côté du cone donné a, le rayon du cercle que l'on cherche, x; & ſuppoſé que $\frac{c}{r}$ exprime le rapport du rayon à la circonférence, on aura $r. c :: x. \frac{cx}{r} =$ la circonference du rayon x, donc le cercle cherché $= \frac{cxx}{2r} = \frac{ac}{2}$ ſurface du Cone, d'où l'on tire $x = \sqrt{ar}$; donc ſi l'on prend une moyenne proportionnelle entre le côté du cone & le rayon de ſa baſe, cette ligne ſera le rayon du cercle cherché.

Si l'on vouloit trouver un cercle égal à la ſurface d'un cone tronqué, on acheveroit le cone, puis l'on prendroit la ſurface du cone entier, enſuite celle du cone ajoûté, & on l'ôteroit du tout, le reſte ſeroit la ſurface du cone tronqué; & on feroit les mêmes raiſonnemens que cy-deſſus.

PROPOSITION X.

PROBLEME.

15. TROUVER *la surface d'un cone égale à un cercle donné.*

Soit le côté du cone $= a$, & le rayon de sa base $= x$, on aura $\frac{c\,x}{r}$ pour la circonférence de sa base, & $\frac{a\,c\,x}{2\,r}$ pour sa surface qui doit être égale par l'hypothese à $\frac{c\,r}{2}$, d'où l'on tire $x = \frac{r\,r}{a}$ valeur du rayon cherché de la base du cone.

COROLLAIRE I.

16. La surface du cone est au cercle qui lui sert de base, comme le côté du cone est au rayon du cercle. Car la surface du cone $= \frac{a\,c}{2}$, & celle du cercle $= \frac{c\,r}{2}$: or $\frac{a\,c}{2}, \frac{c\,r}{2}$: : $a.r$; donc &c.

COROLLAIRE. II.

17. Les surfaces de deux cones droits sont entr'elles en raison composée de leurs côtez & des rayons de leurs bases. Soient a & b les côtez des deux cones, & c & d les circonferences de leurs bases, on aura pour leurs surfaces, $\frac{a\,c}{2}$ & $\frac{b\,d}{2}$. Or les rayons des cercles sont entr'eux comme leurs circonférences, donc les surfaces des cones seront entr'elles en raison composée de leurs côtez & de leurs rayons.

Si les côtez de ces cones étoient paralleles, les surfaces seroient entr'elles en raison des quarrez de leurs côtez. Car leurs côtez seroient entr'eux comme les rayons.

PROPOSITION XI.

PROBLEME.

18. TROUVER *un cone dont la surface soit égale à celle d'un cylindre donné.*

Ayant nommé la surface du cylindre donné, ac; le côté du cone, b; le rayon de sa base, x; on dira $r.c::x.\frac{cx}{r}=$ la circonférence de la base du cone, donc sa surface sera $\frac{bcx}{2r}=ac$ par la supposition; d'où l'on tire $x=\frac{2ar}{b}$ valeur du rayon de la base du cone cherché.

PROPOSITION XII.

PROBLEME.

19. TROUVER *un cylindre dont la surface soit égale à celle d'un cone donné.*

Soit la surface du cone $=\frac{bc}{2}$, la hauteur du cylindre $=a$, & le rayon de sa base $=x$, on aura pour la circonference du cylindre $\frac{cx}{r}$, & pour sa surface $\frac{acx}{r}=\frac{bc}{2}$ par l'hyp. d'où l'on tire $x=\frac{br}{2a}$ valeur du rayon cherché de la base du cylindre. Donc &c.

PROPOSITION XIII.

PROBLEME.

FIG. 10. 20. TROUVER *la surface d'une Sphere.*

Soit le demie-cercle ABD que l'on conçoit tourner autour du diametre AD, il est clair qu'il décrira dans ce mouvement une Sphere, que chaque point de la circonference de ce demi-cercle décrira une circonference entiere, & que la somme de toutes ces circonferences est égale à la surface de la Sphere.

Maintenant soit menée une ordonnée quelconque $MP=y$, & une autre infiniment proche mp, & soit MR parallele à AD, on aura $mR=dy$; soit le rayon BC ou $AC=r$; $AP=x$, donc Pp ou $MR=dx$. On dira $r.c::y.\frac{cy}{r}=$ la circonférence décrite par le point M, & multipliant cette grandeur par l'arc $Mm=\sqrt{dx^2+dy^2}$, on

aura $\frac{cy}{r}\sqrt{dx^2+dy^2}$ = la portion annulaire infiniment petite de la ſurface de la Sphere. Mais à cauſe du cercle $yy = 2rx - xx$, & prenant la difference de cette équation, on aura $y\,dy = r\,dx - x\,dx$, d'où l'on tire $dy = \frac{r\,dx - x\,dx}{y}$, & $dy^2 = \frac{rr\,dx^2 - 2rx\,dx^2 + xx\,dx^2}{2rx - xx}$, mettant donc cette valeur à la place de dy^2 dans $\frac{cy}{r}\sqrt{dx^2+dy^2}$, il viendra $\frac{cy\,dx}{\sqrt{2rx-xx}} = c\,dx$ en mettant pour y ſa valeur; & prenant l'intégrale de cette grandeur, on aura cx pour la portion de la ſurface de la Sphere faite par la révolution de l'arc AM: & $2cr$ pour la ſurface entiere, parce que x devient $= 2r$.

AUTRE MANIERE.

21. LES mêmes choſes étant poſées, on ménera au point M le rayon CM, & on aura deux triangles ſemblables CPM, MRm: car ils ſont rectangles en P & en R, & de plus l'angle RMm que l'on regarde comme rectiligne à cauſe de l'infinie petiteſſe de l'arc Mm, eſt égale à l'angle PMC: car l'angle CMm eſt égal à un droit, & les deux PMC, CMR joints enſemble valent auſſi un droit; ôtant donc la partie commune CMR, on aura $RMm = PMC$. On aura donc $PM(y.)\,MC.(r) :: MR(dx).\ Mm = \frac{r\,dx}{y}$, & multipliant cette valeur par $\frac{cy}{r}$ = la circonférence décrite par le point M, on aura comme auparavant $c\,dx$ pour la differentielle de la ſurface ſpherique, d'où l'on tirera les mêmes valeurs. FIG. 10.

COROLLAIRE I.

22. Il eſt évident que la ſurface $2cr$ de la Sphere eſt quadruple de ſon grand cercle $= \frac{cr}{2}$.

COROLLAIRE II.

23. La ſurface d'un ſegment quelconque de Sphere

coupé par un plan ou par deux plans paralleles eſt à la ſurface entiere de la ſphere, en même raiſon que la portion du diametre coupé par le plan ou par les plans, eſt au diametre entier. Si on répréſente par un cercle la ſurface de la Sphere, on verra évidemment qu'un ſegment quelconque de ce cercle eſt au cercle entier, comme la partie correſpondante du diametre eſt au diametre; donc &c. De là il eſt facile de connoître la ſurface d'un ſegment de ſphere, ſi on connoît la portion du diametre qui correſpond à ce ſegment, & par conſéquent de connoître une portion quelconque de ſurface de ſphere coupée par deux plans paralleles.

On peut encore démontrer ceci en conſidérant que la ſurface de la ſphere eſt égale à la ſurface d'un cylindre, qui a pour baſe la circonference d'un grand cercle de la ſphere, & pour hauteur le diametre de la ſphere; ainſi les ſegmens de la ſurface ſpherique ſeront égaux aux ſegmens correſpondans dans la ſurface du cylindre: mais les ſegmens de ſurfaces cylindriques ſont proportionnels à leurs hauteurs; donc &c.

COROLLAIRE III.

24. La portion de ſurface ſpherique compriſe entre deux grands cercles qui ont pour commune ſection le diametre de la ſphere, eſt à la ſurface entiere, comme l'angle d'inclinaiſon que font ces deux cercles en ſe coupant, eſt à quatre angles droits. Cela eſt évident par la génération de la ſphére.

PROPOSITION XIV.

PROBLEME.

25. TROUVER *un cercle égal à la ſurface d'une ſphere donnée.*

Soit la ſurface de la ſphere $= 2cr$ *, & ſoit x le rayon du cercle cherché, on dira, $r.c::x.\frac{cx}{r}$, donc le cercle cher-

* *Art.* 20.

cle $= \frac{cxx}{2r} = 2cr$, d'où l'on tire $x = 2r$, c'eſt à dire que le rayon de ce cercle eſt égal au diametre de la ſphere.

PROPOSITION XV.

PROBLEME.

26. TROUVER *une ſphere dont la ſurface ſoit égale à un cercle donné.*

Soit le cercle donné $= \frac{cr}{2}$ & le rayon de la ſphere cherchée $= x$, on aura $\frac{cx}{r}$ pour la circonférence de ce rayon ou d'un grand cercle de la ſphere: Donc ſa ſurface ſera * $= \frac{2cxx}{r} = \frac{cr}{2}$, d'où l'on tire $x = \frac{r}{4}$ pour le rayon de la ſphere cherchée. * *Art.* 20.

PROPOSITION XVI.

PROBLEME.

27. TROUVER *un cylindre dont la ſurface ſoit égale à la ſurface d'une ſphere donnée.*

Soit a la hauteur du cylindre, & x la circonference de ſa baſe, ainſi la ſurface du cylindre ſera $ax = 2cr$*, d'où l'on tire $x = \frac{2cr}{a}$ pour la circonférence cherchée, & ſon rayon ſera $= \frac{2rr}{a}$. * *Art.* 20.

PROPOSITION XVII.

PROBLEME.

28. TROUVER *une Sphere dont la ſurface ſoit égale à celle d'un Cylindre donné.*

Soit la ſurface du cylindre $= ac$*, & le rayon de la ſphere $= x$, on dira $r. c :: x. \frac{cx}{r} =$ la circonférence du grand cercle de la ſphere, donc ſa ſurface ſera * $\frac{2cxx}{r} = ac$, d'où * *Art.* 8. * *Art.* 29.

l'on tire $x = \sqrt{\frac{4r}{2}}$. Ainſi le rayon de la ſphere eſt une ligne moyenne proportionnelle entre le rayon du cercle de la baſe du cylindre & la moitié de ſa hauteur.

COROLLAIRE I.

29. La ſurface d'un cylindre circonſcrit à la ſphere & dont la hauteur eſt égale au diametre de la ſphere, eſt quadruple de ſa baſe, qui eſt égale au grand cercle de la ſphere: Car la ſurface cylindrique $= 2cr$, & la circulaire $= \frac{cr}{2}$; donc &c.

COROLLAIRE II.

30. La ſurface de ce même cylindre ſans les deux baſes eſt égale à la ſurface de la ſphere, & ayant ajoûté les deux baſes, la ſurface entiere du cylindre eſt à la ſurface de la ſphere comme 3 eſt à 2.

PROPOSITION XVIII.

PROBLEME.

31. TROUVER *un cone dont la ſurface ſoit égale à celle d'une ſphere.*

Soit le côté du cone $= b$, & la circonférence de ſa baſe $= x$, on aura pour ſa ſurface $\frac{bx}{2} = 2cr$, d'où l'on tire $x = \frac{4cr}{b}$ valeur de la circonférence de la baſe, & le rayon ſera $= \frac{4rr}{b}$.

PROPOSITION XIX

PROBLEME.

32. TROUVER *la ſurface d'une ſphere égale à la ſurface d'un cone donné.*

* Art. 9. Soit ſa ſurface du cone * $= \frac{bc}{2}$, & le rayon de la ſphere cherchée

cherchée $= x$, on dira $r.\ c.\ x.\ \frac{cx}{r} =$ la circonférence du grand cercle de la Sphere, donc ſa ſurface ſera $v = \frac{2cxx}{r} = \frac{bc}{2}$; d'où l'on tire $4xx = br$; donc ſi on prend une moyenne proportionnelle entre le côté du cone, & un quart du rayon de ſa baſe, on aura le rayon de la ſphere cherchée. * Art. 10.

COROLLAIRE.

33. Il eſt évident que la ſurface conique eſt à la ſurface ſpherique de même rayon que la baſe du cone, comme le côté du cone eſt à quatre fois le rayon : car $\frac{bc}{2}.\ 2cr :: b.\ 4r$.

PROPOSITION XX.

PROBLEME.

34. TROUVER *l'eſpace renfermé par la Lunule d'Hippocrate.*

Soit du diametre AB décrit le demi-cercle ADB, & mené à angles droits un autre diametre DE, ſoient du point E tirées les ſoûtendantes EA, EB, & ſoit enfin du rayon EA décrit l'arc du cercle AFB, la figure compriſe entre la demie-circonférence ADB & l'arc AFB, eſt ce qu'on appelle la Lunule d'Hippocrate, dont on demande la valeur. FIG. 11.

Ayant nommé le diametre AB, $2r$; la ſoûtendante EA ſera $= r\sqrt{2}$, donc le cercle décrit du rayon EA eſt double de celui qui eſt décrit du rayon CD : car les cercles ſont entr'eux comme les quarrés de leurs rayons ; nommant donc c, la circonférence de celui qui a pour rayon CD, on aura pour ſa valeur $\frac{cr}{2}$, & cr pour celle du cercle dont le rayon eſt EA. D'où l'on peut conclure en paſſant que pour avoir un cercle double d'un autre, il faut prendre pour rayon la ſoûtendante du quart du premier cercle. Mais le ſecteur $AFBEA$ eſt un quart de cercle, donc il eſt égal au demi-cercle $ADBA$; d'où il eſt évi-

dent que la Lunule eſt égale au triangle AEB; ce qu'il falloit &c.

Ce n'eſt pas ſeulement de l'eſpace entier renfermé par cette Lunule, dont on a la quadrature, mais d'une infinité d'autres : car ſi l'on mene une ordonnée quelconque MP, & du point E, les droites EP, EM coupant l'arc ANB en R, il eſt clair que le triangle EAP eſt égal à la portion AMR de la Lunule, & le triangle EPB, égal à l'eſpace BMR; &c.

DEMONSTRATION.

Soit CG parallele à EM: l'on aura le ſecteur FER, ſecteur $DCG :: \overline{EF}^2.\overline{CD}^2 :: \overline{EB}^2.\overline{CE}^2 :: 2.1$, donc le ſecteur $FER = 2$ ſecteur DCG. Soit enſuite tiré CM, l'on aura l'angle $DCM = 2$ angles $DEM =$ (hyp.) $= 2$ angles DCG, d'où s'enſuit que le ſecteur DCM égalera auſſi 2 ſecteurs DCG. Donc le ſecteur $FER =$ ſecteur DCM; & (retranchant FCS de part & d'autre) on aura $SCER = DFSM$, ou bien (ajoutant SMR de part & d'autre) on aura le triangle $MCE = DFRM$. Mais les triangles ſemblables MOP, EOC, donnent $EO.OM :: CO.OP$. les triangles COM, & POE ſe trouvent égaux, on conclura que le triangle CEP eſt égal au triangle $MCE = DFRM$. Or (Prop. 20.) le triangle $ECA = ADFA$, d'où l'on conclura que le triangle $EPA = AMRA$. Ce qu'il falloit démontrer.

PROPOSITION XXI.

PROBLEME.

35. TROUVER *l'eſpace renfermé par une parabole.*

FIG. 12. Soit la demi-parabole AMB qui a pour axe AD, on demande l'eſpace $AMBDA$.

Ayant mené une ordonnée quelconque PM, que j'appelle y, & une autre infiniment proche pm, ſoit $AD = a$, $BD = b$, $AP = x$, on aura $Pp = dx$, & $ydx =$ au petit

parallelogramme $p M$ qui eſt la differentielle de l'eſpace : Mais à cauſe de la parabole $yy = 1x$, prenant le parametre pour l'unité, donc $y = x^{\frac{1}{2}}$, & $y\,dx = x^{\frac{1}{2}}\,dx$, prenant l'intéglale de cette grandeur, on aura $\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}xy$ en remettant pour $x^{\frac{1}{2}}$ ſa valeur y, qui eſt la valeur de l'eſpace APM; mais lors que P eſt en D, x devient a, & y devient b, donc $\frac{2}{3}xy = \frac{2}{3}ab$ valeur de l'eſpace cherché $AMBDA$.

COROLLAIRE.

36. Il eſt évident que l'eſpace parabolique eſt au parallelogramme circonſcrit comme 2 eſt à 3, & au triangle inſcrit comme 4 à 3.

PROPOSITION XXII.

PROBLEME.

37. TROUVER *l'eſpace renfermé par une hyperbole & ſes aſymptotes, ou ſon rapport avec un rhombe ou un quarré tel que* ABCD. FIG. 13.

Soit la demi-hyperbole AMF, dont les aſymptotes ſont CB, CE, ayant mené une ordonnée quelconque $PM = y$, & une autre pm infiniment proche, on nommera un des côtés du quarré a; CP, x; & Pp, dx; donc $y\,dx =$ au petit parallelogramme Pm differentielle de l'eſpace. Mais à cauſe de l'hyperbole $y = x^{-1}$, donc $y\,dx = x^{-1}\,dx$, dont l'intégrale $= \frac{x^{-1+1}}{0} = \frac{xy}{0}$ en mettant pour y ſa valeur x^{-1}, & P étant en B on aura $\frac{aa}{0}$ pour la valeur de l'eſpace hyperbolique; ce qui fait connoître que cet eſpace eſt infini par rapport au quarré.

Si l'équation à l'hyperbole eût été $y = x^{-\frac{1}{2}}$, on auroit eu $y\,dx = x^{-\frac{1}{2}}\,dx$, dont l'intégrale $= 2x^{-\frac{1}{2}+1} = 2xy$;

& pour lors l'eſpace hyperbolique ſeroit double du quarré.

PROPOSITION XXIII.

PROBLEME.

38. TROUVER *d'une maniere infiniment générale le rapport des eſpaces tant paraboliques qu'hyperboliques aux parallelogrammes.*

Soit cette équation $y^m = x$, qui exprime la nature de toutes les paraboles à l'infini, lors que m marque un nombre poſitif entier ou rompu, & de toutes les hyperboles, lors qu'il marque un nombre négatif. On aura $y = x^{\frac{1}{m}}$, & $y\,dx = x^{\frac{1}{m}}\,dx$ pour la differentielle de tous ces eſpaces. Et prenant l'intégrale de cette grandeur, on aura $\frac{m}{m+1}x^{\frac{1}{m}+1} = \frac{m}{m+1}xy$, en mettant y pour ſa valeur $x^{\frac{1}{m}}$: Donc en général l'eſpace parabolique ou hyperbolique eſt au parallelogramme comme m eſt à $m+1$, c'eſt-à-dire comme l'expoſant de la puiſſance eſt à ce même expoſant augmenté de l'unité.

Si $m = 2$, on aura $yy = 1x$, qui eſt à la parabole ordinaire, ſi $m = -1$, on aura $xy = 1$, qui eſt à l'hyperbole, & ſi $m = 3$, on aura $y^3 = 1x$ qui exprime la nature d'une des paraboles cubiques; pour lors $y\,dx = x^{\frac{1}{3}}\,dx$, dont l'intégrale $= \frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}} = \frac{3}{4}xy$; donc cet eſpace parabolique eſt au parallelogramme comme 3 eſt à 4. &c.

* *C'eſt pour parler le langage ordinaire que je me ſers du mot de* plus qu'infini. *Une perſonne doit nous donner au premier jour un éclairciſſement ſur cette matiere.*

COROLLAIRE.

39. Si l'on prend garde que dans le cas des hyperboles l'expoſant m ſe change en $-m$, l'on aura alors pour la valeur de ces eſpaces pris en général $\frac{-m}{-m+1}xy = \frac{m}{m-1}xy$: d'où l'on voit que ces eſpaces ſeront finis, lors que $m > 1$, infinis, lors que $m = 1$, & plus qu'infinis*, lors que $m < 1$.

PROPOSITION XXIV.

PROBLEME.

40. TROUVER *l'eſpace Elliptique, ou le rapport qu'il a avec le cercle inſcrit ou circonſcrit.* FIG. 141

Soit l'Ellipſe $ABDE$, dont les axes ſont AD, BE, & ſoit du centre C de l'ellipſe & du diametre BE décrit le cercle $BNEB$, on demande le rapport de l'eſpace elliptique au cercle inſcrit.

Soit menée une ordonnée quelconque MP au petit axe de l'ellipſe, ſa partie NP ſera l'ordonnée du cercle. Or on démontre dans les Traités des Sections Coniques, que les quarrez des ordonnées de l'ellipſe, & les quarrés des ordonnées correſpondantes du cercle ſont proportionnels aux quarrés des axes de l'ellipſe: Mais les quarrés qui ſont en proportion géométrique ont auſſi leurs racines en proportion géométrique; donc la ſomme des ordonnées au petit axe de l'ellipſe eſt à la ſomme des ordonnées du cercle qui a pour diametre cet axe, & par conſéquent l'ellipſe eſt au cercle comme le grand axe eſt au petit; d'où l'on peut tirer cette concluſion, que le cercle eſt au quarré de ſon diametre comme l'ellipſe eſt au rectangle de ſes deux axes.

Maintenant ſi on décrit un cercle qui ait pour diametre le grand axe de l'ellipſe, on démontrera auſſi que l'eſpace elliptique eſt au circulaire, comme le petit axe eſt au FIG. 142 grand. Car $\overline{AD}^2 . \overline{BE}^2 :: \overline{NP}^2 . BP \times PE = \overline{MP}^2$ à cauſe du cercle: Donc $AD . BE :: NP . MP$. donc &c.

Ou bien ſoit tiré le rayon CM, & du point G où le rayon coupe le petit cercle AGD ſoit abaiſſée la perpendiculaire GF. On aura à cauſe des triangles ſemblables CPM, CFG, FG ou PN. (parce que GN parallele à CE, rencontre l'ellipſe en N), $PM :: CG . CM$; ou $AC . CE :: AD . BE$: Mais la ſomme des PN remplit l'eſpace

elliptique, & celle des PM remplit l'eſpace circulaire; donc &c.

COROLLAIRE.

41. Il eſt évident 1°. Que la quadrature de l'Ellipſe ſuppoſe la quadrature du cercle. 2°. Que l'ellipſe borne un eſpace qui eſt moyen proportionnel entre le cercle inſcrit & le circonſcrit.

PROPOSITION XXV.

PROBLEME.

42. TROUVER *le rapport d'un eſpace hyperbolique quelconque à l'eſpace renfermé par une hyperbole équilatere de même hauteur, & qui ait le même axe traverſant.*

FIG. 16. Soit une hyperbole MAB qui ait pour axe traverſant la ligne Aa, & pour axe conjugué la ligne Dd, & ſoit une hyperbole équilatere NAE qui ait le même axe traverſant Aa. Je dis que l'eſpace $MABM$ eſt à l'eſpace $NAEN$ comme le petit axe Dd eſt au grand axe Aa. Car par la proprieté de l'hyperbole le quarré d'une ordonnée quelconque à l'axe traverſant eſt au rectangle des parties de cet axe prolongé, comme le quarré de l'axe conjugué eſt au quarré de l'axe traverſant. Ayant donc mené une ordonnée quelconque PM prolongée juſqu'à l'hyperbole équilatere en N, & nommé l'axe Aa, a; le conjugué Dd, b; AP, x; PM, y; PN, z; on aura 1°. $aa.bb::ax+xx.yy$. 2°. $aa.aa::ax+xx.zz$. Donc $yy.zz::bb.aa$; donc $PM(y).PN(z)::Dd(b).Aa(a)$. Or les PM rempliſſent l'eſpace $MABM$, & les PN. rempliſſent l'eſpace $NAEN$; donc &c.

PROPOSITION XXVI.

PROBLEME.

43. TROUVER *la valeur de l'eſpace Logarithmique* AMBCE.

Soit la Logarithmique AMB, qui a pour aſymptote CE, ſoit menée une ordonnée quelconque PM, & une autre infiniment proche pm, & du point M ſoit menée la rangente MT, on demande l'eſpace $AMPE$ infiniment long du côté où l'aſymptote s'approche de la courbe, & borné de l'autre par la courbe, l'ordonnée & l'aſymptote. FIG. 17.

Ayant nommé PM, y; Pp, dx; on aura $y\,dx =$ au petit parallelogramme pM qui eſt la differentielle ou l'element de l'eſpace. Mais par la proprieté de la Logarithmique la ſoutangente eſt toujours conſtante, c'eſt-à-dire égale à une droite donnée a; on aura donc $dy.dx::y.a$, d'où l'on tire $dx = \frac{a\,dy}{y}$, & mettant pour dx cette valeur, on aura $y\,dx = a\,dy$, dont l'intégrale qui eſt la ſomme de tous ces petits parallelogrammes, ſera ay valeur de l'eſpace cherché.

COROLLAIRE.

44. Il évident 1°. que cet eſpace quoiqu'infiniment long eſt au triangle MPT fait par l'ordonnée, la ſoutangente & la tangente menée du même point où l'ordonnée rencontre la courbe, comme 2 eſt à 1.

2°. Que l'eſpace compris entre deux ordonnées eſt égal au rectangle de la ſoutangente & de la difference de ces mêmes ordonnées : ainſi l'eſpace $PMRQ = PT \times DM$.

3°. Que les eſpaces compris entre deux ordonnées ſont entr'eux comme les differences de ces ordonnées.

PROPOSITION XXVII.

PROBLEME.

45. TROUVER *l'eſpace renfermé par une Logarithmique ſpirale.*

Soit la courbe AMB une Logarithmique ſpirale qui fait une infinité de retours autour du centre A avant que de parvenir en B, & dont la nature eſt telle qu'ayant FIG. 18.

mené d'un de ſes points quelconques M au centre la ligne MA, & la tangente MT, l'angle AMT ſoit par tout le même, on demande l'eſpace renfermé par cette ligne infinie & par le rayon AB.

Ayant nommé AB, a; & mené du centre ou du pole A une ordonnée quelconque $AM = y$, & une autre infiniment proche Am, on décrira du rayon AM le petit arc $MR = dx$, & on aura $\frac{y\,dx}{2}$ = au petit Secteur MAR; que l'on regarde comme un triangle rectiligne à cauſe de l'infinie petiteſſe de l'arc MR, & qui eſt la differentielle de l'eſpace. Mais par la propriété de la courbe, l'angle que fait la tangente avec ſon ordonnée eſt toûjours le même, ainſi la raiſon de AM à AT perpendiculaire ſur AM, eſt une raiſon conſtante; qu'elle ſoit par exemple comme m eſt à n. On aura donc $dy.dx::m.n$; d'où l'on tire $dx = \frac{n\,dy}{m}$, & mettant cette veleur à la place de dx, on aura $\frac{y\,dx}{2} = \frac{n\,y\,dy}{2\,m}$, dont l'integrale $= \frac{n\,yy}{4\,m}$ valeur de l'eſpace $MQAM$; alors $\frac{n\,yy}{4\,m} = \frac{t\,yy}{4\,y} = \frac{t\,y}{4}$. Mais $\frac{t\,y}{2}$ = le triangle AMT. Donc $\frac{t\,y}{4} = \frac{1}{2}\,AMT$; mais lors que le point M ſe trouve en B, on aura $\frac{n\,a\,a}{4\,m}$ valeur de l'eſpace cherché, parce qu'alors y devient a. Donc l'eſpace logarithmique eſt au quarré de AB comme n eſt à $4\,m$.

Si l'on nomme la ſoutangente AT, t; on aura cette proportion $dy.dx::y.t$. D'où l'on voit clairement que l'eſpace ſpiral ſera égal à la moitié du triangle formé par la tangente, l'ordonnée & la ſoutangente. Car en quelque endroit que ſoit le point M, on a toûjous $y\,dx = t\,dy$: or la ſomme des $y\,dx$ eſt double de l'eſpace renfermé par la ſpirale & par ſon ordonnée y, & la ſomme des $t\,dy$ eſt égale au triangle fait par la même ordonnée, la tangente & la ſoutangente; donc &c.

PROP. XXVIII.

PROPOSITION XXVIII.

PROBLEME.

46. TROUVER *l'eſpace renfermé par une ſpirale ordinaire.*

Soit une ſpirale $AKMB$, & un cercle décrit du rayon AB. La proprieté de cette courbe eſt telle qu'ayant mené du centre A un rayon quelconque AN qui coupe la ſpirale en M, la circonference entiere $BDNdB$ eſt à l'arc BDN, comme le rayon AN eſt à la ligne AM: on demande l'eſpace renfermé par la ſpirale & par le rayon AB. FIG. 19.

Soit mené un autre rayon An infiniment proche de AN, & ſoit décrit du centre A le petit arc MR: ayant nommé la circonference entiere du cercle, c; ſa partie BDN, x; donc $Nn=dx$; le rayon AN, r, ſa partie AM, y; on aura à cauſe des Secteurs ſemblables ANn, AMR: $AN(r).AM(y).Nn(dx)::MR=\frac{ydx}{r}$, & multipliant cette grandeur par $\frac{1}{2}y$, il viendra $\frac{yydx}{2r}=$ au Secteur infiniment petit MAR que l'on doit regarder comme la differentielle de l'eſpace: mais à cauſe de la ſpirale $c.x::r.y$, donc $y=\frac{rx}{c}$, & $yy=\frac{rrxx}{cc}$; mettant donc cette valeur à la place de yy, on aura $\frac{yydx}{2r}=\frac{rrxdx}{2cc}$ dont l'integrale $=\frac{rx^3}{6cc}$ valeur de l'eſpace $AKMA$; ce qui donne l'eſpace entier $AKMBA=\frac{cr}{6}$, parce qu'alors x ſe trouve $=c$, & $y=r$. Donc l'eſpace ſpiral de la premiere révolution eſt au cercle circonſcrit, comme 1 eſt à 3.

PROPOSITION XXIX.

PROBLEME.

47. TROUVER *généralement la valeur de cet eſpace ſpiral, quel que ſoit le degré de la puiſſance de la circonférence & celui du rayon.*

FIG. 19.

Les mêmes choſes étant poſées que dans l'*article précédent*, on aura $\frac{yydx}{2r}$ = à la differentielle MAR de l'eſpace $AKMA$. Mais par la proprieté de la ſpirale, nommant n le degré de la puiſſance de la circonference, & m celui du rayon, on aura $c^n . x^n :: r^m . y^m$, d'où l'on tire $y = \frac{r x^{\frac{n}{m}}}{c^{\frac{n}{m}}}$. & yy, $= \frac{r r x^{\frac{2n}{m}}}{c^{\frac{2n}{m}}}$, & mettant cette valeur à la place de yy, il viendra $\frac{yydx}{2r} = \frac{r x^{\frac{2n}{m}}}{2c^{\frac{2n}{m}}} dx$, dont l'integrale $= \frac{m r x^{\frac{2n}{m}+1}}{(4n+2m) c^{\frac{2n}{m}}}$ valeur de l'eſpace $AKMA$, d'où l'on tire $\frac{m}{2m+4n} cr$ = à l'eſpace entier que l'on demandoit. D'où l'on doit conclure en général, que l'eſpace ſpiral eſt au cercle circonſcrit, comme m eſt à $m+2n$; c'eſt-à-dire, que cet eſpace eſt au cercle comme l'expoſant du rayon eſt au même expoſant du rayon plus le double de l'expoſant de la circonférence.

Si $m = 1$, $n = 1$, il eſt évident que la ſpirale ſera celle d'Archimede. Si $m = 2$, & $n = 3$, c'eſt-à-dire, que la ſpirale ſe décrive par un mouvement accéleré qui ſe faſſe ſelon la raiſon des quatrez ſur le rayon, & ſelon la raiſon des cubes ſur la circonférence, alors l'eſpace ſpiral ſera au cercle comme 1 eſt à 4.

De là il eſt facile de réſoudre ce problême. Trouver un eſpace ſpiral qui ſoit au cercle, ou une portion qui ſoit au Secteur correſpondant en raiſon donnée.

Digitized by Google

Soit la raiſon donnée de p à q. On aura $q.p::m+2n.m$; donc $q-p.p::2n.m$; & $\frac{q-p}{2}.p::n.m$. D'où il eſt évident que prenant p pour l'expoſant du rayon, il faut prendre $\frac{q-p}{2}$ pour celui de la circonference.

AUTRE MANIERE.

48. SOIT d'un point quelconque P pris ſur le rayon AB décrit du centre A l'arc de cercle POM, & un autre infiniment proche pom, qui rencontrent la ſpirale en M & m, il eſt évident que les eſpaces infiniment petits renfermez par ces arcs ſont les élemens de l'eſpace exterieur $BDNdBMKAB$ borné par le cercle & par la ſpirale. Nommant donc comme auparavant la circonférence entiére, c; ſa partie BDN, x; AP, y; donc $Pp=dy$; on aura $AB\ (r).AP(y)::BDN\ (x).POM=\frac{xy}{r}=$ la portion de circonférence décrite du point P, & multipliant par dy, on aura $\frac{xydy}{r}=$ à la differentielle de l'eſpace. Mais par la nature de la ſpirale $c^n.x^n.::r^m.y^m$; d'où l'on tire $x=\frac{cy^{\frac{m}{n}}}{r^{\frac{m}{n}}}$, & mettant pour x cette valeur dans $\frac{xydy}{r}$, il viendra $\frac{cy^{\frac{m}{n}+1}}{r^{\frac{m}{n}+1}}dy$, dont l'intégrale $=\frac{ncy^{\frac{m}{n}+2}}{\overline{m+2n}\times r^{\frac{m}{n}+1}}$ valeur de l'eſpace $POMKAP$, ce qui donne $\frac{n}{m+2n}cr$ pour celle de l'eſpace entier, parce que x devenant $=c$, $y=r$. Donc cet eſpace eſt au cercle comme $2n$ eſt à $m+2n$; d'où l'on tirera les mêmes concluſions que dans l'article précédent: car ſi $m=1$, & $n=1$, on aura $\frac{1}{3}cr$ pour cet eſpace; donc cet eſpace eſt au cercle comme 2 eſt à 3, donc l'eſpace intérieur ſera au cercle comme 1 eſt à 3. FIG. 19.

PROPOSITION XXX.

PROBLEME.

FIG. 20. 49. TROUVER *l'eſpace renfermé par une ſpirale* A K M B *dont la propriété eſt telle qu'ayant décrit un cercle du rayon* A B, *& mené du centre* A *un autre rayon quelconque* A N *coupant la ſpirale en* M, *la puiſſance* n *de la circonférence entiére* B d N D B *eſt à une pareille puiſſance de l'arc* B d N, *comme la puiſſance* m *du rayon* A N *eſt à une pareille puiſſance de ſa partie* M N *terminée par la ſpirale & par la circonférence.*

Les mêmes choſes étant poſées, & ayant nommé $B d N$, x; $N M$ ou $B P$, y; donc $A M = r - y$, on aura $AN(r). AM(r-y) :: Nn(dx). MR = \frac{r dx - y dx}{r}$, & multipliant par $\frac{r-y}{2}$, il viendra $\frac{rr dx - 2ry dx + yy dx}{2r} =$ au Secteur infiniment petit MAR: Mais à cauſe de la ſpirale $x = \frac{cy^{\frac{m}{n}}}{r^{\frac{m}{n}}}$, prenant la difference de cette équation, on aura: $dx = \frac{mcy^{\frac{m}{n}-1}dy}{nr^{\frac{m}{n}}}$, & mettant cette valeur à la place de dx; on aura $\frac{rr dx - 2ry dx + yy dx}{2r} = \frac{mcy^{\frac{m}{n}-1}dy}{2nr^{\frac{m}{n}-1}} - \frac{mcy^{\frac{m}{n}}dy}{nr^{\frac{m}{n}}} + \frac{mcy^{\frac{m}{n}+1}dy}{2nr^{\frac{m}{n}+1}}$, dont l'intégrale $= \frac{cy^{\frac{m}{n}}}{2r^{\frac{m}{n}-1}} - \frac{mcy^{\frac{m}{n}+1}}{m+nr^{\frac{m}{n}}} + \frac{mcy^{\frac{m}{n}+2}}{2m+4nr^{\frac{m}{n}+1}}$ valeur de l'eſpace $B m M A B$, ce qui donne $\frac{cr}{2} - \frac{m}{m+n}cr + \frac{m}{2m+4n}cr$ pour celle de l'eſpace entier, parce qu'alors $y = r$. Et donnant à tout un commun dénominateur, on aura enfin $\frac{nn}{mm+3mn+nn}cr =$ à l'eſpace cherché. Ce qu'il falloit trouver.

Si l'on prenoit au lieu de la valeur de dx, celle de y, on auroit 1°. $y = \frac{rx^{\frac{n}{m}}}{c^{\frac{n}{m}}}$, 2°. $yy = \frac{rrx^{\frac{2n}{m}}}{c^{\frac{2n}{m}}}$, & mettant ces valeurs dans $\frac{rrdx - 2rydx + yydx}{2r}$ on trouveroit $\frac{rdx}{2} - \frac{rx^{\frac{n}{m}}}{c^{\frac{n}{m}}}dx + \frac{rx^{\frac{2n}{m}}}{2c^{\frac{2n}{m}}}dx$, dont l'intégrale $= \frac{rx}{2} - \frac{mrx^{\frac{n}{m}+1}}{n+mc^{\frac{n}{m}}} + \frac{mrx^{\frac{2n}{m}+1}}{4n+2mc^{\frac{2n}{m}}}$ sera la valeur de l'espace partial, & $\frac{cr}{2} - \frac{m}{n+m}cr + \frac{m}{4n+2m}cr$ sera celle de l'espace entier, parce que y devenant r, x devient c, & donnant un commun dénominateur ; on aura comme auparavant $\frac{nn}{mm+3mn+2nn}cr$. Donc cet espace est au cercle comme $2nn$ est à $mm+3mn+2nn$.

AUTRE MANIERE.

50. LES mêmes choses étant posées que dans *l'art* 48. on aura $AB\ (r).\ AP\ (r-y) :: BdN\ (x).\ PM = \frac{rx - xy}{r}$, & multipliant par dy, on aura $\frac{rxdy - xydy}{r} =$ à la différentielle $Ppm M$ de l'espace. Mais $x = \frac{cy^{\frac{m}{n}}}{r^{\frac{m}{n}}}$, donc $\frac{rxdy - xydy}{r} = \frac{cy^{\frac{m}{n}}dy}{r^{\frac{m}{n}}} - \frac{cy^{\frac{m}{n}+1}dy}{r^{\frac{m}{n}+1}}$, dont l'intégrale $\frac{ncy^{\frac{m}{n}+1}}{n+mr^{\frac{m}{n}}} - \frac{ncy^{\frac{m}{n}+2}}{m+2nr^{\frac{m}{n}+1}}$ sera la valeur de l'espace partiale $BmMRPB$, & $\frac{n}{m+n}cr - \frac{n}{m+2n}cr$ sera celle du total $BmMKAB$ qui devient comme auparavant $= \frac{nn}{mm+3mn+2nn}cr$ en donnant un commun dénominateur ; donc &c.

FIG. 20.

PROPOSITION XXXI.

PROBLEME.

FIG. 21. 41. SOIT *une ligne courbe* A M B *telle qu'ayant mené d'un de ſes points quelconques* M *l'ordonnée* M P *perpendiculaire ſur l'axe* A B, *& une autre infiniment proche* m p, *& nommé* A B, a ; A P, *x*; *donc* P p = d *x*; *&* P B = a — x; P M, y ; *on ait toujours cette proportion* $a^m . x^m :: a - x^n . y^n$. *On demande la valeur de l'eſpace* A M B A.

L'équation à la courbe ſera $y = \frac{\overline{a - x \times x}^{\frac{m}{n}}}{a^{\frac{m}{n}}}$ & multipliant de part & d'autre par *d x*, on aura $y\,dx = \frac{\overline{a - x \times x}^{\frac{m}{n}} dx}{a^{\frac{m}{n}}}$ pour la différentielle de l'eſpace, dont l'intégrale $= \frac{n a x^{\frac{m}{n}+1}}{m+n\,a^{\frac{m}{n}}} - \frac{n x^{\frac{m}{n}+2}}{m+2n\,a^{\frac{m}{n}}}$ ſera la valeur de l'eſpace *AMP A*, ce qui donnera $\frac{nn}{mm+3mn+2nn}\,aa$ pour celle du total *AMB A*; parce que *A P* devenant *A B*, *x* devient *a*. D'où l'on tirera cette concluſion, que cet eſpace eſt au quarré fait ſur l'axe *A B*, comme *nn* eſt à *mm* + 3 *mn* + 2 *nn*.

Si *m* = 2 & *n* = 1, l'équation ſera $y = \frac{a x x - x^3}{a a}$, & on trouvera $\frac{1}{12}\,aa$ pour l'eſpace renfermé par la courbe.

Maintenant ſoit prolongée *P M* juſqu'en *N*, en ſorte qu'ayant nommé *P N*, *z*; on ait cette proportion *a*. *z* :: *a* — *x*. *y*; & qu'on décrive une courbe dont la nature ſoit exprimée par cette équation $ay = \overline{a - x} \times z$, on demande l'eſpace renfermé par cette courbe, & le rapport qu'il a avec l'eſpace renfermé par la courbe *AMB*.

A cauſe de la courbe *AND*, on a $y = \frac{\overline{a - x}}{a} \times z$, mais

par l'équation cy-deſſus, on a trouvé $y = \frac{\sqrt{a-x}}{a^{\frac{m}{n}}} \times x^{\frac{m}{n}}$, donc $\frac{\sqrt{a-x}}{a} \times z = \frac{\sqrt{a-x}}{a^{\frac{m}{n}}} \times x^{\frac{m}{n}}$, d'où l'on tire $z = \frac{x^{\frac{m}{n}}}{a^{\frac{m}{n}-1}}$ ou $z^n = a^{n-m} x^m$, qui eſt une équation qui exprime la nature de toutes les paraboles à l'infini. Ainſi * l'eſpace $ANDBA$ ſera au quarré de AB comme n eſt à $m+n$. Donc l'eſpace parabolique eſt à l'eſpace renfermé par la courbe AMB comme $mm+3mn+2nn$ eſt à $mn+nn$, ou comme $m+2n$ eſt à n. * Art. 38.

Il eſt évident que ſi dans l'équation à la parabole m eſt plus grande que n, on aura $x^m = \frac{a^m z^n}{a^n}$, & qu'ainſi elle aura pour axe la ligne AE, & pour ſommet le point A; mais que ſi m eſt plus petit que n, on aura $z^n = \frac{a^n x^m}{a^m}$, & que la parabole aura pour axe la ligne AB, & pour ſommet le même point A.

Soit encore prolongée de l'autre côté l'ordonnée PM juſqu'en Q, en ſorte qu'ayant nommé PQ, z; on ait $a.x::y.z$; & que par tous ces points ainſi trouvez on faſſe paſſer la courbe AQB, on demande la valeur de l'eſpace qu'elle renferme.

A cauſe de la courbe AQB, on aura $y = \frac{az}{x}$, ou $y^n = \frac{a^n z^n}{x^n}$:: Mais à cauſe de la courbe AMB, $y^n = \frac{\sqrt{a-x}^n \times x^m}{a^m}$, donc $\frac{a^n x^n}{x^n} = \frac{\sqrt{a-x}^n \times x^m}{a^m}$, donc $a^{m+n} z^n = a-^n \times x^{m+n}$, d'où l'on tire cette proportion $a^{m+n} x^{m+n} :: \sqrt{a-x}^n . z^n$. ce qui fait connoître que cette courbe eſt de la même nature que AMB.

Pour avoir l'eſpace renfermé par cette courbe ou le rapport qu'il a avec celui de la courbe AMB, on prendra la valeur de z qu'on trouve égale à $\frac{\sqrt{a-x} \times x^{\frac{m+n}{n}}}{a^{\frac{m}{n}}}$, & multi-

pliant par dx, on aura $z\,dx = \frac{ax^{\frac{m+n}{n}}\,dx - x^{\frac{m+n}{n}}\,dx}{a^{\frac{m+n}{n}}} =$ à la différentielle de l'espace, dont l'intégrale $= \frac{nax^{\frac{m+n}{n}+1}}{(m+2n)a^{\frac{m+n}{n}}} - \frac{nx^{\frac{m+n}{n}+2}}{(m+3n)a^{\frac{m+n}{n}}}$ valeur de l'espace APQ, ce qui donne $\frac{n}{m+2n}aa - \frac{n}{m+3n}aa = \frac{nn}{mm+5mn+6nn}aa$ valeur de l'espace entier $AQBA$, parce que x devient $= a$. Donc cet espace est à celui de la courbe AMB, comme $mm+3mn+2nn$ est à $mm+5mn+6nn$, ou comme $m+n$ est à $m+3n$. Ce qu'il falloit trouver.

PROPOSITION XXXII.

PROBLEME.

52. TROUVER *l'espace renfermé par une spirale parabolique.*

FIG. 22.

Soit la portion du cercle AMB qui a pour rayon la ligne AC, & soit la courbe AND dont la nature est telle qu'ayant mené d'un point quelconque M de l'arc de cercle, le rayon MC coupant la courbe en N, on ait toujours cette proportion; l'arc AM est à la ligne MN, comme cette même ligne MN est à une droite donnée a; on demande l'espace renfermé par cette courbe, le rayon AC, & par l'ordonnée CN.

Ayant nommé le rayon CA ou CM, r, sa partie CN, y; donc $MN = r - y$; & l'arc AM, x; soit mené un autre rayon Cm infiniment proche de CM, & soit décrit du point C le petit arc NR : On aura par la propriété de la courbe $ax = rr - 2ry + yy$, & (en prenant les différences) $dx = \frac{2ydy - 2rdy}{a} = Mm$: Mais à cause des Secteurs semblables CMm, CNR, on fera $CM(r).CN(y) :: Mm\left(\frac{2ydy-2rdy}{a}\right).NR = \frac{2yydy-2rydy}{ar}$, & multipliant

pliant cette valeur par $\frac{1}{2}y$, on aura $\frac{y^3dy - ryydy}{ar} =$ au petit Secteur CNR, qui eſt la différentielle de l'eſpace, dont l'intégrale $= \frac{y^3}{4ar} - \frac{y^4}{5a}$, eſt la valeur de l'eſpace cherché ACN.

On trouvera pour le triligne MAN, $\frac{ryy}{2a} - \frac{y^4}{4ar} - \frac{rry}{a} + \frac{y^3}{3a}$. Car $Mm + NR = \frac{rdx + ydx}{r}$, laquelle grandeur étant multipliée par $\frac{r-y}{2}$ donne $\frac{rrdx - yydx}{2r} =$ au trapeze infiniment petit $MR = \frac{rrydy - y^3dy - r^3dy + ryydy}{ar}$ en mettant pour dx ſa valeur $\frac{2ydy - 2rdy}{a}$; dont l'intégrale vaut le triligne MAN.

Lorſque y devient r, on a pour l'eſpace ſpiral $\frac{r^3}{12a}$, & pour l'eſpace borné par le cercle & la courbe $\frac{5r^3}{12a}$. Mais ſi l'on prend pour le parametre de la courbe une troiſiéme proportionnelle à l'axe ou à la circonférence du cercle $= c$, & au rayon $= r$, on aura pour le premier eſpace $\frac{cr}{12}$, qui ſera au cercle comme 1 eſt à 6; & pour le ſecond $\frac{5cr}{12}$, qui ſera au cercle comme 5 eſt à 6.

PROPOSITION XXXIII.

PROBLEME.

53. TROUVER *l'eſpace renfermé par une Cycloïde.*

Soit la demi-cycloïde ANF formée par le roulement du demi-cercle AMB le long de BF, & qui a pour diametre AB, on demande la valeur de l'eſpace $ANFBA$. FIG. 23.

Soit menée d'un point quelconque P l'ordonnée au cercle PM prolongée juſqu'à la roulette en N, & une autre infiniment proche pn, ſoit du point M menée MR, & du point N, NQ paralleles à AB, & ſoit achevé le parallelogramme $ABFE$. On nommera enſuite AB, $2r$; la demi-circonferenee $AMB = BF$, $\frac{1}{2}c$; AP, x; donc Pp ou

MR ou $NQ = dx$; PM, y; donc $Rm = dy$, & $Mm = \sqrt{dx^2 + dy^2}$.

Pour trouver maintenant l'eſpace cycloïdal, on cherchera l'eſpace extérieur $ANFEA$ en cette ſorte. On menera des points Q & n les lignes QG, nH paralleles à AB, & on cherchera la valeur de Qn ou GH, qui eſt égale à $Rm + Mm$; ce que l'on prouve ainſi.

Ayant mené NK parallele à Mm, que l'on regarde comme une ligne droite à cauſe de ſon infinie petiteſſe, on aura les deux triangles MRm & NQK, qui ſeront ſemblables & égaux, donc $Rm = QK$; reſte donc à prouver que $Kn = Mm$; ce qui eſt évident, car $Kn = mn - MN$; mais $mn = Am$, & $MN = AM$; donc $Kn = Am - AM = Mm$. On aura donc en termes analytiques $Qn = dy + \sqrt{\frac{rdx}{2rx - xx}}$. Car à cauſe des triangles ſemblables $CPM, MRm, PM, (y = \sqrt{2rx - xx}.)\ CM\ (y) :: RM(dx).\ Mm = \sqrt{\frac{rdx}{2rx - xx}}$. Mais à cauſe du cercle $yy = 2rx - xx$, donc en prenant la différence, $dy = \frac{rdx - xdx}{\sqrt{2rx - xx}}$, donc $Qn = Rm + Mm = \frac{2rdx - xdx}{\sqrt{2rx - xx}}$, & multipliant cette grandeur par $GN = x$, on aura $\frac{2rxdx - xxdx}{\sqrt{2rx - xx}} = dx\sqrt{2rx - xx}$ pour la différentielle de l'eſpace $ANFEA$; mais cette différentielle eſt la même que celle du demi cercle AMB, donc l'eſpace $ANFEA$ vaut ce demi-cercle.

COROLLAIRE.

54. IL eſt évident que l'eſpace cycloïdal intérieur eſt triple de ſon demi-cercle générateur : Car ce demi-cercle $= \frac{cr}{4}$, & le parallelogramme $BE = cr$; mais l'eſpace $ANFEA = \frac{cr}{4}$, donc &c. D'où l'on voit que l'eſpace cycloïdal entier eſt triple de ſon cercle générateur.

Si on double toutes les ordonnées PM, & qu'on faſſe

paſſer par l'extremité de toutes ces lignes une courbe qui ſera une eſpece d'ellipſe, on diviſera par ce moyen l'eſpace cycloïdal $ANFBA$ en trois eſpaces égaux entr'eux, puis qu'il eſt évident que l'eſpace renfermé par le cercle générateur & par l'ellipſe ſera égal au cercle.

Si du point A on mene la ligne AF, l'eſpace compris par la cycloïde ANF & par la droite AF eſt égal au demi-cercle générateur. Car le triangle ABF eſt double de ce demi-cercle.

PROPOSITION XXXIV.

PROBLEME.

55. TROUVER *la valeur de l'eſpace Ciſſoïdal.*

Soit la Ciſſoïde ANE qui a pour aſymptote BF, & ſoit le demi-cercle générateur AMB, on demande l'eſpace compris entre le diametre AB de ce cercle, l'aſymptote BF, & la ciſſoïde ANE. FIG. 24.

Soit menée l'ordonnée PM coupant la ciſſoïde en N, & une autre infiniment proche pm, ſoit nommée AB, $2r$; AP, x, donc $PB = 2r - x$, & $Pp = dx$; PM, y.

La propriété de la Ciſſoïde eſt telle que $\div BP.PM :: AP.PN$; donc $PM(y).AP(x) :: AP(x).PN = \frac{xx}{y}$, & multipliant par dx, & mettant pour y ſa valeur $\sqrt{2rx - xx}$ à cauſe du cercle, on aura $\frac{xxdx}{\sqrt{2rx - xx}}$ pour la la valeur du petit quadrilatere $PNnp$ qui eſt la différentielle de l'eſpace; mais $\frac{xxdx}{\sqrt{2rx - xx}} = \frac{2rxdx}{\sqrt{2rx - xx}} - dx\sqrt{2rx - xx}$. Or il eſt viſible que l'intégrale du dernier membre eſt égale au demi ſegment $AOMPA$, & celle du premier eſt quadruple du ſegment $AOMA$, ce que je prouve ainſi.

Ayant mené du point A dans le demi-cercle AMB la ſécante AM, & une autre infiniment proche Am, on décrira du centre A le petit arc MR. On aura à cauſe du cercle $AM = \sqrt{2rx}$, donc $Rm = \frac{rdx}{\sqrt{2rx}}$. Mais à cauſe

des triangles ſemblables AMP, MRm, (car ils ſont rectangles en P & en R, & les angles PMA & $Rm M$ ſont égaux ayant chacun pour meſure un arc égal à la moitié de l'arc AM). $PM(\sqrt{2rx-xx}.AP(x)::Rm\left(\frac{rdx}{\sqrt{2rx}}\right).MR=\frac{rxdx}{\sqrt{2rx}\times\sqrt{2rx-xx}}$, & multipliant par $\frac{1}{2}AM=\frac{\sqrt{2rx}}{2}$, on aura $\frac{rxdx}{2\sqrt{2rx-xx}}$ valeur du petit Secteur MAR; dont l'intégrale = le ſegment $AOMA$; donc $\frac{2rxdx}{\sqrt{2rx-xx}}$ eſt quadruple de ce ſegment; ce qu'il falloit prouver.

Il eſt évident que l'eſpace Ciſſoïdal eſt triple de ſon demi-cercle générateur. Ainſi il eſt facile de trouver un eſpace ciſſoïdal égal à celui de la Cycloide, ou en telle raiſon qu'on voudra.

PROPOSITION XXXV.

PROBLEME.

56. TROUVER *l'eſpace renfermé par une Conchoïde & ſon aſymptote.*

FIG. 25. Soit du pole C & de l'aſymptote DE décrite la demi-conchoïde AMB, dont la nature eſt telle qu'ayant mené d'un de ſes points quelconques M au pole C la ligne MC coupant l'aſymptote en N, le rectangle de CN par NM ſoit toujours égal au rectangle de CD par DA, on demande l'eſpace Conchoïdal $BMADE$.

Soient nommées CD, a; DA, b; CN, x; NM, y; ſoit menée une autre ligne Cm infiniment proche de CM, & ſoient du point C décrits les petits arcs NQ, MR que l'on regarde comme des lignes droites à cauſe de leur infinie petiteſſe; donc $Qn=dx$. On aura donc par la propriété de la courbe $xy=ab$, d'où l'on tire $MN(y)=\frac{ab}{x}$, & $CM=\frac{ab+xx}{x}$. Mais à cauſe des triangles ſemblables $CDN, NQn, ND(\sqrt{xx-aa}).CD(a)::nQ(dx)$.

$QN = \frac{adx}{\sqrt{xx-aa}}$. Et à cauſe des Secteurs ſemblables $CNQ, CMR, CN(x).CM\left(\frac{ab+xx}{x}\right) :: NQ\left(\frac{adx}{\sqrt{xx-aa}}\right)$. $MR = \frac{axxdx+aabdx}{xx\sqrt{xx-aa}}$, & multipliant cette grandeur par $\frac{xx+ab}{2x}\left(\frac{CM}{2}\right)$ on aura $\frac{ax^4dx+2aabxxdx+a^3bbdx}{2x^3\sqrt{xx-aa}} = \frac{axdx}{2\sqrt{xx-aa}} + \frac{aabdx}{x\sqrt{xx-aa}} + \frac{a^3bbdx}{2x^3\sqrt{xx-aa}}$ valeur du Secteur infiniment petit CMR qui eſt la différentielle de l'eſpace CAM. Mais il eſt évident que le premier membre $\frac{axdx}{2\sqrt{xx-aa}}$ eſt égal à la différentielle de l'eſpace CDN, ſi donc on trouve l'intégrale des deux autres membres $\frac{aabdx}{x\sqrt{xx-aa}}$ & $\frac{a^3bbdx}{2x^3\sqrt{xx-aa}}$, qui valent le petit trapeze $MRQN$, on aura l'eſpace cherché $NDMA$.

Pour cela ſoit décrit le quart de cercle CAB; ayant pris ſur le rayon $CB = a$, la partie $CP = \frac{aa}{x}$, & mené par le point P l'ordonnée PM, & une autre infiniment proche pm; on aura par la proprieté du cercle $MP = \frac{a}{x}\sqrt{xx-aa}$. Or en prenant les différentielles de CP & de PM, on trouve $Pp = -\frac{aadx}{xx}$, & MR ou $Qq = \frac{a^3dx}{xx\sqrt{xx-aa}}$; donc $\frac{CA \times Pp}{MP}$ c'eſt à dire le petit arc $Mm = -\frac{aadx}{x\sqrt{xx-aa}}$. dont l'intégrale vaut l'arc BM; où l'on doit remarquer que le ſigne — fait voir que x diminuant, $\frac{aa}{x}$ augmente, & qu'il faut prendre pour l'intégrale l'arc BM & non pas l'arc AM, par ce qu'il s'agit ici d'avoir l'intégrale de toutes les différentielles $\frac{aabdx}{x\sqrt{xx-aa}}$ à commencer depuis la valeur de CN (*Fig.* 25.) juſqu'à celle de CD. D'où il eſt évident que ſi l'on multiplie l'arc BM par la donnée b, on aura l'intégrale cherchée du membre $\frac{aabdx}{x\sqrt{xx-aa}}$.

FIG. 26.

Maintenant le petit eſpace $MQqm$ ou $MQ \times Qq =$ FIG. 27.

$\frac{a^3 dx}{x^3 \sqrt{xx-aa}}$, & par conſequent ſon intégrale ſera égale a ſegment de cercle $CQMB$. Multipliant donc ce ſegment par bb & le diviſant par $2aa$, on aura l'intégrale de $\frac{a^3 bb dx}{2x^3 \sqrt{xx-aa}}$ qui répond à toutes les valeurs de x depuis CN juſqu'à CD. L'eſpace Conchoïdal $ADNM$ eſt donc égal à l'arc circulaire BM multiplié par la donnée DA (b), & au ſegment de cercle $CQMB$ multipliée par bb & diviſé par $2aa$; ce qu'il falloit trouver.

57. Si $MN = AD$, pour lors la Conchoïde ſera celle de Nicomede, & on aura en nommant CN, x; CM, $= a + x$; & en faiſant les mêmes raiſonnemens, $\frac{a^3 dx}{2x\sqrt{xx-aa}}$ $+ \frac{aadx}{\sqrt{xx-aa}} + \frac{axdx}{2\sqrt{xx-aa}}$ valeur du petit Secteur MCR, dont le dernier membre eſt égal au petit Secteur CNQ.

Maintenant pour trouver l'intégrale de $\frac{a^3 dx}{2x\sqrt{xx-aa}}$ on décrira un quart de cercle GHI, & on prendra ſur ſon rayon $GI = a$, la partie $GE = \frac{aa}{x}$, puis ayant mené le rayon GF, & un autre infiniment proche Gf, & les ordonnées FE, fe, on aura $FE = \frac{a}{x}\sqrt{xx-aa}$, & Ee ou $Kf = -\frac{aadx}{xx}$. Mais à cauſe des triangles ſemblables $GEF, FKf, EF\left(\frac{a}{x}\sqrt{xx-aa}\right).GF(a)::Kf\left(-\frac{aadx}{xx}\right).Ff = -\frac{aadx}{x\sqrt{xx-aa}}$, & multipliant par $\frac{1}{2}a$, on aura $-\frac{a^3 dx}{2x\sqrt{xx-aa}}$ pour la valeur du petit Secteur FGf, dont l'intégrale eſt égale au Secteur GFI à cauſe du ſigne négatif. Ce qu'il falloit trouver en premier lieu.

FIG. 28. Pour trouver l'intégrale de l'autre membre $\frac{aadx}{\sqrt{xx-aa}}$ il faut décrire une hyperbole équilatere AMB, dont le centre eſt C, & le demi-axe $CA = a$, & menant deux ordonnées PM, pm infiniment proches, & du point C ti-

rant deux lignes CM, Cm, je dis que le petit triangle MCm eſt égal à la différentielle $\frac{aadx}{2\sqrt{xx-aa}}$, dont l'intégrale = l'eſpace ACM; Ainſi le double de cet eſpace ſera l'intégrale cherchée de $\frac{aadx}{\sqrt{xx-aa}}$.

Pour le prouver ſoit $CP=x$, $PM=y$, on aura à cauſe de l'hyperbole $yy=xx-aa$, & prenant les différences, $dy=\frac{xdx}{\sqrt{xx-aa}}$: Donc $\overline{Mm}^2\,(dx^2+dy^2)=\frac{2xxdx^2-aadx^2}{xx-aa}$. Mais $CM=\sqrt{2xx-aa}$, dont la différence $rm=\frac{2xdx}{\sqrt{2xx-aa}}$. On aura donc $\overline{Mm}^2-\overline{rm}^2\,(\overline{Mr}^2)=\frac{2xxdx^2-aadx^2}{xx-aa}-\frac{4xxdx^2}{2xx-aa}=\frac{a^4dx^2}{2xx-aa\times xx-aa}$ en donnant un commun dénominateur; donc $Mr=\frac{aadx}{\sqrt{2xx-aa}\times\sqrt{xx-aa}}$, & multipliant cette grandeur par $\frac{1}{2}$ $CM=\frac{1}{2}\sqrt{2xx-aa}$, on aura $\frac{aadx}{2\sqrt{xx-aa}}$ valeur du petit triangle MCm, dont l'intégrale eſt égale à l'eſpace ACM. Donc &c.

Il eſt donc évident que l'eſpace Conchoïdal quoi qu'infiniment étendu eſt d'une grandeur finie, ce qui eſt digne de remarque, Il en faut dire autant de l'eſpace Ciſſoïdal dont on a déterminé la valeur dans le problême précédent.

SECTION SECONDE.

DE LA DIMENSION DES SOLIDES.

QUOIQU'IL y ait plusieurs manieres de concevoir la formation des Solides, on n'en considérera qu'une qui paroît la plus simple & la plus facile, & qui se fait par le mouvement uniforme d'un plan quelconque autour d'une ligne que l'on regarde comme l'axe de la figure. Par exemple, si on conçoit qu'un parallelogramme rectangle se meuve autour d'un de ses côtez pris comme axe, & qu'il fasse une révolution entiere, il formera par ce mouvement un cylindre. Il en est de même des autres surfaces.

Il est évident que toutes les perpendiculaires à cet axe décrivent dans ce mouvement des cercles ou des portions de cercles si la révolution n'est pas entiere.

PROPOSITION I.

PROBLEME.

58. TROUVER *la valeur d'un prisme.*

FIG. 6. Soit un prisme polygone dont la hauteur $AB = a$, sa partie $AP = x$, & $Pp = dx$. Il est clair que si on coupe ce solide par un plan parallele à la base, passant par le point P, la section sera un polygone semblable & égal à celui de la base, & qu'il y a autant de ces surfaces polygones qu'il y a de parties dans la hauteur AB. Et nommant la somme des côtez de la base c; & la hauteur d'un des triangles b, on aura $\frac{bc}{2}$ = au polygone de la section & multipliant

multipliant par dx, il viendra $\frac{bcdx}{2}$ = au petit fragment qui a pour hauteur Pp, & qui eſt la différentielle du Solide, dont l'intégrale $= \frac{bcx}{2}$ eſt la valeur de la partie du priſme qui a pour hauteur AP, ce qui donne $\frac{abc}{2}$ pour celle du priſme entier, parce qu'en B, x devient $= a$.

Si le priſme n'avoit pas pour baſe un polygone régulier, on feroit à peu près les mêmes raiſonnemens.

PROPOSITION II.

PROBLEME.

59. TROUVER *la valeur d'une pyramide.*

Soit une pyramide polygone dont la hauteur $AB = a$, ſa partie $AP = x$, & $Pp = dx$, ſoit mené du point B le rayon $BD = r$, & du point P le rayon $PM = y$; il eſt évident que ſi on coupe cette pyramide par un plan parallele à la baſe paſſant par le point P, la ſection ſera un polygone ſemblable à celui de la baſe: Et nommant c, la ſomme des côtez de la baſe, & b la hauteur d'un des triangles, on aura $\frac{bc}{2}$ = au polygone de la baſe; & pour avoir celui de la ſection on raiſonnera ainſi. Les polygones ſemblables ſont entr'eux en raiſon doublée de leurs rayons, ainſi la baſe eſt à la ſection comme rr eſt à yy: mais $rr.yy :: aa.xx$; donc $aa.xx :: \frac{bc}{2}.\frac{bcxx}{2aa}$ = au polygone qui a pour rayon PM, & multipliant par dx, on aura $\frac{bcxxdx}{2aa}$ = au petit fragment qui a pour hauteur Pp, & qui eſt la différentielle de la pyramide, dont l'intégrale $= \frac{bcx^3}{6aa}$ eſt la valeur de la pyramide qui a pour hauteur AP, ce qui donne $\frac{abc}{6}$ pour celle de la pyramide entiere, parce qu'en B, x devient $= a$. FIG. 21

Il ſeroit facile de trouver par là la valeur d'un fragment quelconque coupé par un plan ou par deux plans paralleles à la baſe.

Si la pyramide n'avoit pas pour baſe un polygone régulier, on feroit à peu près les mêmes raiſonnemens; car les polygones ſemblables ſont entr'eux en raiſon doublée de leurs côtez homologues, ou bien les différentielles ou les élemens de la pyramide décroiſſent en raiſon doublée des hauteurs.

COROLLAIRE.

60. Il eſt évident que la pyramide eſt au priſme de même baſe & de même hauteur comme 1 eſt à 3.

PROPOSITION III.

PROBLEME.

61. TROUVER *la valeur d'un cylindre.*

Soit un cylindre formé par la révolution du parallélogramme $ABCD$, dont la hauteur $= a$, la circonférence de la baſe $= c$, & le rayon $= r$, on aura $*\frac{rc}{2} =$ au cercle de la baſe: Or comme le cylindre eſt compoſé d'autant de ces cercles qu'il y a de parties dans ſa hauteur, ſi on multiplie $\frac{cr}{2}$ par a, on aura $\frac{acr}{2} =$ au cylindre cherché.

FIG. 8.

* *Art.* 2.

PROPOSITION IV.

PROBLEME.

62. TROUVER *la valeur d'un cone.*

Soit le cone formé par la révolution du triangle rectangle ADB autour de AD, ſoient tirées les perpendiculaires MP, mp, il eſt clair qu'elles décriront en tournant des cercles, dont la ſomme ſera la valeur du cone.

FIG. 9.

Soit $AD = a$, $BD = r$, la circonférence de la baſe $= c$, $PM = y$, $AP = x$; donc $Pp = dx$: on aura $\frac{cr}{2} =$ au cercle de la baſe; & pour avoir celui qui eſt décrit par PM, on dira $r.\ c :: y.\ \frac{cy}{r}$ valeur de la circonférence,

donc $\frac{cyy}{2r}$ = au cercle, & $\frac{cyy\,dx}{2r}$ = à la différentielle du cone: Mais à cauſe des triangles ſemblables APM, ADB. on aura $x.y :: a.r$, donc $x = \frac{ay}{r}$, & $dx = \frac{ady}{r}$, & mettant cette valeur à la place de dx, on aura $\frac{cyy\,dx}{2r} = \frac{acyy\,dy}{2rr}$, dont l'intégrale $= \frac{acy^3}{6rr}$ valeur de la partie du cone décrite par APM, & $\frac{acr}{6}$ valeur du cone entier, parce que P étant en D, y devient r.

COROLLAIRE.

63. Il eſt évident que le cone eſt au cylindre de même baſe & de même hauteur comme 1 eſt à 3.

PROPOSITION V.

PROBLEME.

64. TROUVER *un cylindre égal à un cone donné.*

Soit le cone donné $= \frac{acr}{6}$, ſoit priſe pour la hauteur du cylindre une grandeur quelconque b, & ſoit nommé le rayon de ſa baſe, x; on dira $r.c :: x.\frac{cx}{r}$; donc le cercle de ſa baſe $= \frac{cxx}{2r}$, donc le cylindre $= \frac{bcxx}{2r} = \frac{acr}{r}$ par la ſuppoſition, d'où l'on tire $x = \sqrt{\frac{arr}{3b}}$ valeur du rayon cherché de la baſe du cylindre; Donc &c.

PROPOSITION VI.

PROBLEME.

65. TROUVER *un cone égal à un cylindre donné.*

Soit le cylindre donné $= \frac{bcr}{2}$, & ſoit la hauteur du cone $= a$, le rayon de ſa baſe $= x$, donc le cone $= \frac{acxx}{6r} = \frac{bcr}{2}$ * Art. 62.

par l'hypotheſe ; d'où l'on tire $x = \sqrt{\frac{3brr}{a}}$ valeur du rayon de la baſe du cone que l'on demande.

PROPOSITION VII.

PROBLEME.

66. TROUVER *la valeur d'une ſphere.*

FIG. 10. Soit décrit le demi-cercle ABD, ſi on conçoit que ſon diametre AD ſoit diviſé en une infinité de parties égales, & que de tous ces points on mene des ordonnées PM, pm, il eſt clair que ce demi-cercle tournant ſur le diametre décrira une ſphere dans ce mouvement, & que toutes ſes ordonnées décriront des ſurfaces circulaires que l'on peut regarder comme les parties dont la ſphere eſt compoſée. Soit le rayon $BC = r$, la circonference $= c$, $PM = y$; $AP = x$, donc $Pp = dx$, pour avoir le cercle décrit par PM, on dira $r.c :: y.\ \frac{cy}{r} =$ à la circonférence, donc $\frac{cyy}{2r} =$ au cercle, & multipliant par dx, on aura $\frac{cyydx}{2r} =$ à la différentielle de la ſphere. Mais à cauſe du cercle $yy = 2rx - xx$; mettant donc cette valeur à la place de yy, on aura $\frac{cyydx}{2r} = cxdx - \frac{cxxdx}{2r}$, & prenant l'intégrale de cette grandeur, on aura $\frac{cxx}{2} - \frac{cx^3}{6r} =$ à la portion de la ſphere décrite par AMP; ce qui donne $\frac{2crr}{3}$ pour la valeur de la ſphere cherchée, parce qu'en D, x devient $= 2r$.

AUTRE MANIERE.

FIG. 4. 67. Si l'on conçoit que du centre du demi-cercle DAE on décrive par tous les points du rayon CA des demi circonférences MPO, mpo, il eſt clair que dans le mouvement de révolution du demi-cercle toutes ces demi-circonférences décriront des ſurfaces ſphériques, dont la ſomme eſt la valeur de la ſphere. Ayant nommé la ſurface entiére

de la ſphere; $2cr$; CP, x; donc $Pp = dx$, on trouvera la ſurface ſphérique décrite par la demi-circonference MPO en raiſonnant ainſi. Les ſurfaces des ſpheres ſont entr'elles comme les quarrez de leurs rayons, donc $rr.$ $2cr :: xx.\frac{2cxx}{r} =$ à la ſurface décrite par MPO, & $\frac{2cxxdx}{r} =$ à une portion concentrique infiniment petite de la ſphere, dont l'intégrale $= \frac{2cx^3}{3r}$ valeur du noyau ſpherique $PMQOP$, & $\frac{2crr}{3} =$ à la ſphere entiere, parce qu'en A, x devient $= r$.

COROLLAIRE.

68. Il eſt facile par cette méthode d'avoir la valeur du ſolide d'une ſphere creuſe, pourvû que l'on ſçache l'épaiſſeur de la matiere dont cette ſphere eſt compoſée.

AUTRE MANIERE.

69. ON peut conſidérer la ſphere comme un polyedre d'une infinité de ſurfaces, & que chacune de ces ſurfaces ſervent de baſes à autant de pyramides, qui ont pour ſommet commun le centre de ſa ſphere où elles ſe réuniſſent comme dans un point, & pour hauteur commune le rayon même de la ſphere. Multipliant donc la ſurface de la ſphere $=$ * $2cr$ qui eſt la baſe de toutes ces pyramides, par $\frac{1}{3}r$, on aura $\frac{2}{3}crr =$ à la ſphere cherchée. * *Art.* 20.

COROLLAIRE.

70. IL eſt évident 1°. Que la ſphere eſt au cube de ſon diametre, comme les deux tiers de la circonférence eſt à quatre fois ſon diametre. Car $\frac{2}{3}crr.\ 8r^3 :: \frac{2}{3}c.\ 8r$, & par conſéquent que la ſphére eſt aux deux tiers du cube de ſon diametre, comme la circonférence eſt à quatre fois ſon diametre.

2°. Que la ſphére eſt au cylindre circonſcrit comme 2 eſt à 3 : car dans ce cas le cylindre $= crr$.

3°. Que la ſphere eſt au cone qui a pour baſe un grand cercle de la ſphere, & pour hauteur ſon diametre, comme 2 eſt à 1 ; car le cone $= \frac{crr}{3}$.

4°. Donc le cone, la ſphere & le cylindre de même hauteur & de même diametre ſont comme les nombres 1, 2, 3.

5°. Que le cone eſt égal à l'excès du cylindre par deſſus la ſphere.

PROPOSITION VIII.

PROBLEME.

71. TROUVER *un cylindre égal à une ſphere donnée.*

Soit la ſphere donnée $= \frac{2crr}{3}$, & ſoit la baſe du cylindre $= \frac{cr}{2}$, & ſa hauteur $= x$, on aura pour la valeur du cylindre $\frac{crx}{2} = \frac{2crr}{3}$ par la ſuppoſition ; d'où l'on tire $x = \frac{4r}{3}$ pour la hauteur du cylindre ; & mettant pour x cette valeur dans $\frac{crx}{2}$, on aura $\frac{2crr}{3}$; donc &c.

PROPOSITION IX.

PROBLEME.

72. TROUVER *une ſphere égale à un cylindre donné.*

Soit le cylindre donné $= \frac{acr}{2}$, & ſoit le rayon de la ſphere cherchée $= x$, on dira $r.c::x.\frac{cx}{r} =$ à la circonférence du grand cercle de la ſphere, & $\frac{cxx}{2r} =$ au cercle, donc la ſphere* $= \frac{2cx^3}{3r} = \frac{acr}{2}$ par l'hypotheſe, d'où l'on tire $x = \sqrt[3]{\frac{3}{4}arr}$ valeur du rayon de la ſphere que l'on demande. Si l'on eût pris $2r$ pour la hauteur du cylindre, on au-

* *Art. 66.*

ou $crr = \frac{2cx^3}{3r}$, & $x = r\sqrt[3]{\frac{3}{2}}$.

PROPOSITION X.

PROBLEME.

73. TROUVER *une ſphere égale à un cone donné.*

Soit le cone donné $= \frac{acr}{6}$, on aura * pour la valeur de la ſphere $\frac{2cx^3}{3r} = \frac{acr}{6}$ par l'hypotheſe, d'où l'on tire $x = \sqrt[3]{\frac{arr}{4}}$. Donc &c. * *Art.* 66.

PROPOSITION XI.

PROBLEME.

74. TROUVER *un cone égal à une ſphere donnée.*

Soit la ſphere $= \frac{2crr}{3}$, le cone ſera * $\frac{acxx}{6r} = \frac{2crr}{3}$; d'où l'on tire $x = \sqrt{\frac{4r^3}{a}} = 2r\sqrt{\frac{r}{a}}$. * *Art.* 62.

Il ſeroit facile en ſe ſervant de la même méthode, d'égaler les Solides dont on va donner la dimenſion, à des cylindres, des cones & des ſphéres, & par conſéquent de trouver le rapport que ces corps ont entr'eux.

PROPOSITION XII.

PROBLEME.

75. TROUVER *la valeur d'un ſolide formé par la révolution du triangle* A C B *autour de l'axe* D E *parallele à la baſe* A B. FIG. 29.

Soit tirée la ligne *C G* perpendiculairement ſur la baſe du triangle & qui en ſera la hauteur. Si l'on mene une infinité de lignes telles que *M M*, *m m*, paralleles à *A B*, il eſt clair qu'elles décriront dans leur mouvement autant de ſurfaces cylindriques qui ſeront entr'elles en raiſon compoſée de leurs rayons & de leurs hauteurs, & qui ſe-

ront les élemens ou les differentielles dont le Solide eſt compoſé. Soit nommé AB, a; CG, r; MM, y; CP, x; donc $Pp = dx$, & ſoit la circonférence décrite par le point A, $= c$, on aura la ſurface cylindrique décrite par AB, $= ac$; & pour avoir celle qui eſt décrite par MM, on dira $AB \times GC (ar). ac$; ou $r. c :: MM \times PC (xy). \frac{cx}{r}$; & multipliant cette ſurface par dx, on aura $\frac{cxdx}{r} =$ à la différentielle du Solide; mais à cauſe du triangle, $a. r :: y. x$; donc $y = \frac{ax}{r}$, mettant pour y cette valeur dans $\frac{cxydx}{r}$ on aura $\frac{acxxdx}{rr}$, dont l'intégrale $= \frac{1acx^3}{3rr}$ valeur du Solide décrit par le triangle MCM, ce qui donne pour le Solide entier $\frac{1}{3}acr$, parce qu'en G, $x = r$.

COROLLAIRE.

76. Il eſt évident que ſi le triangle ABC avoit pour hauteur la moitié de AB, le Solide formé par ſa révolution ſeroit égal à une ſphere formée par un demi-cercle qui auroit pour diametre la baſe AB de ce triangle.

PROPOSITION XIII.

PROBLEME.

FIG. 30. 77. TROUVER *la ſolidité d'un Conoïde parabolique formé par la révolution de la parabole* A M B *autour de l'axe* A D.

Soit menée une ordonnée quelconque $PM = y$ & une autre infiniment proche pm, ſoit $AD = a$, $AP = x$, donc $Pp = dx$, $DB = r$, & la circonférence décrite par le point B, $= c$. On peut conſidérer ce Solide comme compoſé d'une infinité de ſurfaces circulaires décrites par les ordonnées qui en ſeront les rayons: Ainſi pour avoir celle qui eſt décrite par PM, je raiſonne ainſi : $r. c :: y. \frac{cy}{r} =$ à la circonférence décrite par le point M, donc le cercle qui

qui a pour rayon $PM = \frac{cy}{2r}$, & multipliant cette grandeur par dx on aura $\frac{cyydx}{2r} =$ à la portion infiniment petite du conoïde : Mais à cause de la parabole $yy = 1x$, en prenant le paramettre pour l'unité, donc $\frac{cyydx}{2r} = \frac{cxdx}{2r}$, & prenant l'intégrale, on aura $\frac{cxx}{4r} = \frac{cyyx}{4r}$ en remettant pour x sa valeur yy, valeur du Solide décrit par AMP, ce qui donne $\frac{acr}{4}$ pour le Solide entier, parce que x devenant a, y devient r.

COROLLAIRE.

78. Il est évident, 1°. Qu'un conoïde parabolique est au cylindre circonscrit comme 1 est à 2. Car ce cylindre $= \frac{acr}{2}$, donc &c.

2°. Que le cone inscrit est au cylindre comme 1 est à 3.

3°. Que le cylindre, le conoïde & le cone sont entr'eux comme les nombres 3, $1\frac{1}{2}$, 1.

PROPOSITION XIV.

PROBLEME.

79. LES *mêmes choses étant posées, trouver la valeur de ces Solides, de quelque degré que soit la parabole.* FIG. 30.

Soit pour cela $y^m = x$, qui exprime la nature de toutes les paraboles à l'infini, donc $y = x^{\frac{1}{m}}$, & $yy = x^{\frac{2}{m}}$: Mettant donc pour yy cette valeur dans la différentielle du Solide $= {}^{*}\frac{cyydx}{2r}$, on aura $\frac{cx^{\frac{2}{m}}dx}{2r}$, dont l'intégrale $=$ * *Art.* 77.

$\frac{mcx^{\frac{2}{m}+1}}{2m+4r} = \frac{mcxyy}{2m+4r}$ valeur du Solide formé par AMP, ce qui donne $\frac{m}{2m+4}acr =$ au Solide cherché. Ainsi en

général le conoïde eſt au cylindre circonſcrit $\frac{acr}{2}$ comme m eſt à $m+2$.

Si $m=3$, l'équation ſera $y^3=x$, & on trouvera $\frac{3}{10}acr$ pour la valeur du Solide, qui eſt au cylindre circonſcrit comme 3 eſt à 5: Car $\frac{3acr}{10}$. $\frac{acr}{2}$:: 3. 5. &c.

PROPOSITION XV.

PROBLEME.

FIG. 30. 80. TROUVER *la valeur du Solide formé par la révolution de l'eſpace parabolique* A M B D *autour de* B T *parallele à l'axe.*

Soit la demi-parabole AMB qui a pour axe AD, ſoit menée l'ordonnée MP & une autre infiniment proche mp, prolongées juſqu'en Q, q. il eſt clair que toutes ces ordonnées décriront en tournant des ſurfaces circulaires, qui ſeront les élemens dont ce Solide eſt compoſé. Ayant nommé DB ou AT, r; la circonférence décrite par le point D, c; AP, x; PM, y; donc $MQ=r-y$; on dira, $r.c::MQ\,(r-y).\frac{cr-cy}{r}=$ à la circonférence décrite par le point M; donc $\frac{crr-2cry+cyy}{2r}=$ au cercle décrit par MQ. Et ôtant cette grandeur de $\frac{cr}{2}$ & multipliant par dx, on aura $\frac{2crydx-cyydx}{2r}=$ à la portion infiniment petite du Solide qui a pour hauteur Pp; & mettant pour y ſa valeur $x^{\frac{1}{2}}$ à cauſe de la parabole, on aura cette différentielle $\frac{2crx^{\frac{1}{2}}dx-cxdx}{2r}$, dont l'intégrale $=\frac{2crx^{\frac{3}{2}}+1}{3r}-\frac{cxx}{4r}=\frac{8crxy-3cxyy}{12r}$ qui eſt la valeur de la portion indéterminée du Solide décrite par APM, d'où l'on tire $\frac{5}{12}acr$ pour celle du Solide entier, parce que P en D, x devient $=a$, & $y=r$.

On trouvera les mêmes choſes en conſiderant que les lignes menées dans la parabole paralleles à l'axe AD décrivent en tournant des ſurfaces cylindriques qui ſont les élemens dont ſe Solide eſt compoſé.

COROLLAIRE.

81. Il eſt évident que ce Solide eſt au cylindre circonſcrit comme 5 eſt à 6.

PROPOSITION XVI.

PROBLEME.

82. TROUVER *la valeur du Solide formé par la révolution de l'eſpace parabolique* A M B D *autour de la tangente au ſommet* A T, *que l'on regarde comme l'axe.* FIG. 31

Si l'on conçoit que la ligne AD ſoit diviſée en une infinité de parties égales, & que de tous ces points on méne à la parabole des lignes QM, qm perpendiculaires ſur AD, il eſt évident qu'elles décriront en tournant des ſurfaces cylindriques paralleles entr'elles. Ayant donc nommé AD, r; BD ou AT, a; AP ou QM, x; PM ou AQ, y; donc $Qq = dy$, & la circonférence décrite par le point D, c; on aura $ac =$ à la ſurface cylindrique décrite par DB; & pour avoir celle qui eſt décrite par QM, on dira $DB \times DA\ (ar).\ ac$ ou $r.c. ::\ QM \times QA\ (xy).\ \frac{cxy}{r} =$ à la ſurface cherchée, donc $\frac{cxydy}{r} =$ à la différentielle du Solide. Mais à cauſe de la parabole $xx = 1y$, donc $x = y^{\frac{1}{2}}$, & mettant cette valeur à la place de x, on aura $\frac{cy^{\frac{1}{2}}dy}{r}$, dont l'intégrale $= \frac{2}{5}\frac{cy^{\frac{5}{2}}}{r} = \frac{2}{5}\frac{cxy}{r} =$ à la portion du Solide décrite par AQM, ce qui donne $\frac{2}{5}acr$ pour le Solide entier, parce qu'en B, x devient $= a$, & $y = r$. Ce qu'il falloit &c.

Si l'on vouloit avoir tout en x, on chercheroit la valeur

de $dy = 2xdx$, & on trouveroit en mettant pour yy & dy leurs valeurs, $\frac{2cx+dx}{r}$ pour la differentielle du Solide, dont l'intégrale $= \frac{2cx^5}{5r}$, & mettant pour x^4 sa valeur yy, on auroit comme auparavant $\frac{2cxyy}{5r}$ ou $\frac{2acr}{5}$ valeur du Solide cherché.

COROLLAIRE.

83. Il eſt évident 1°. Que ce Solide eſt au cylindre circonſcrit comme 4 eſt à 5.

2°. Que le Solide décrit par la partie concave ATB de la parabole autour de AT, $= \frac{1}{10}\ acr$. Mais ſi on le vouloit avoir par la régle, ayant nommé $BT.\ r$, & c la circonférence décrite par le point B, on diroit $r.\ c :: y.\ \frac{cy}{r}$; donc le cercle décrit par le rayon MP, $= \frac{cyy}{2r}$; Ainſi on auroit pour la différentielle du Solide $\frac{cx^4dx}{2r}$, dont l'intégrale $= \frac{cx^5}{10r} = \frac{cyyx}{10r}$ valeur du Solide décrit par AMP, ce qui donne comme auparavant $\frac{acr}{10}$ = au Solide entier, qu'il falloit trouver.

PROPOSITION XVII.

PROBLEME.

FIG. 30. 84. TROUVER *la valeur du Solide formé par la révolution de l'eſpace parabolique autour de ſa baſe* B D.

Ayant nommé AD, r; & DB, a; & le reſte comme dans les articles précédens. Il eſt clair que toutes les ordonnées PM décriront des ſurfaces cylindriques paralleles qui ſeront entr'elles en raiſon compoſée de leurs rayons & de leurs hauteurs. Ainſi on aura pour celle qui eſt décrite par PM, $\frac{cry - cxy}{r}$, & pour le différentielle du Solide

$\frac{cryydx - cxydx}{r}$: mais à cauſe de la parabole, $1x = yy$, & $dx = 2ydy$, mettant donc ces valeurs, on aura $\frac{2cryydy - 2cyydy}{r}$; dont l'intégrale $= \frac{2cry^3}{3r} - \frac{2cy^5}{5r}$ qui eſt la valeur de la portion de Solide décrite par APM, d'où l'on tire $\frac{4}{15}acr$ pour celle du Solide entier ; parce qu'en D, x devient $= r$, & $y = a$.

On trouvera encore les mêmes choſes ſi l'on conſidere que les lignes ménées dans la parabole paralleles à l'axe AD décrivent des ſurfaces circulaires qui ſeront les élemens du Solide.

COROLLAIRE.

85. Il eſt évident que ce Solide eſt au cylindre circonſcrit comme 8 eſt à 15.

PROPOSITION XVIII.

PROBLEME.

86. TROUVER *la valeur du Solide formé par la révolution de l'eſpace parabolique* A B D *autour de* A D *lorſque les ordonnées* B D, M P *ne ſont pas perpendiculaires ſur* A D *qui eſt en ce cas un diametre.* FIG. 32.

Il eſt évident que toutes les ordonnées MP, mp au diametre de la parabole décriront en tournant des ſurfaces coniques, qui ſeront paralleles entr'elles & qui ſeront les élemens du Solide : Mais les ſurfaces des cones qui ont leurs côtez paralleles, ſont entr'elles * comme les quarrez de ces côtez, donc ces ſurfaces ſeront entr'elles comme les quarrez des ordonnées BD, MP, qui en ſont les côtez ; & à cauſe de la parabole $\overline{BD}^2 . \overline{MP}^2 :: AD . AP$; donc ces ſurfaces ſeront comme AD, AP Maintenant ſoit $AD = b$, $AP = x$, $DB = r$, & $c =$ à la circonférence décrite par le point B, on aura * $\frac{cr}{2}$ pour

* Art. 17.

* Art. 9.

la ſurface conique décrite par BD; & pour avoir celle qui eſt decrite par MP, on dira $b.x::\frac{cr}{2}.\frac{crx}{2b}=$ à la ſurface cherchée, & multipliant cette grandeur par dz, on aura $\frac{crxdz}{2b}=$ à la differentielle du Solide. Car ayant abaiſſé ſur BD prolongée la perpendiculaire $AH=a$ qui eſt la hauteur du Solide, & continué les ordonnées MP, mp juſqu'en Q, q, & nommé AQ, z; donc $Qq=dz$. Mais à cauſe des triangles ſemblables APQ, ADH, $x.z::b.a$, donc $z=\frac{ax}{b}$, & $dz=\frac{adx}{b}$; mettant donc cette valeur à la place de dz dans $\frac{crxdz}{2b}$, on aura $\frac{acrxdx}{2bb}$ dont l'intégrale $=\frac{acrxx}{4bb}$ valeur du Solide décrit par AMP, ce qui donne $\frac{acr}{4}$ pour le Solide entier, parce qu'en D, x devient $=b$. Ce qu'il falloit trouver. Si l'on fait $b=a$, l'on aura le problême de l'*art.* 77. en corollaire de celui-cy.

COROLLAIRE

87. Il eſt évident que ce Solide eſt à celui qui eſt formé par la révolution du parallelogramme TD comme 1 eſt à 2. Car ce Solide eſt égal à la ſurface conique décrite par BD & multipliée par la hauteur AH, $=\frac{acr}{2}$; donc &c.

PROPOSITION XIX.

PROBLEME.

FIG. 31. 88. LES *mêmes choſes étant poſées, trouver la valeur du Solide formé par la révolution de l'eſpace parabolique autour de* AT *tangente au ſommet.*

Il eſt évident que toutes les ordonnées PM décriront en tournant des ſuperficies cylindriques paralleles qui ſeront entr'elles en raiſon compoſée de leurs rayons & de leurs hauteurs, & qu'ainſi la ſurface cylindrique décrite par BD eſt à celle qui eſt décrite par PM comme $BD\times$

AH eſt à $MP \times AQ$, ou comme $BD \times AD$ eſt à $MP \times AP$, & nommant BD, a, AD, b; & AH, r; la circonférence décrite par H ou D, c; AP, y; MP, x; AQ, z: On dira $AD \times DB\,(ab)$. ac (ſurface cylindrique décrite par BD) :: $AP \times PM\,(xy)$. $\frac{cxy}{b}$ = à la ſurface cylindrique décrite par MP, & multipliant par dz, on aura $\frac{cxydz}{b}$ = à la différentielle du Solide. Mais à cauſe de la parabole $x = y^{\frac{1}{2}}$, & $dz = \frac{rdy}{b}$; mettant donc ces valeurs dans $\frac{cxydz}{b}$, on aura $\frac{cry^{\frac{1}{2}}dy}{bb}$, dont l'intégrale = $\frac{2}{5}\frac{cry^{\frac{5}{2}}}{bb} = \frac{2}{5}\frac{crxyy}{bb}$, en remettant pour $y^{\frac{1}{2}}$ ſa valeur x. D'où l'on tire $\frac{2}{5}acr$ valeur du Solide que l'on demande, parce que y devenant $= b$, x devient $= a$.

COROLLAIRE.

89. Il eſt évident que ce Solide eſt à la ſuperficie cylindrique décrite par BD & multipliée par AH comme 2 eſt à 5. Car cette ſuperficie cylindrique décrite par BD & multipliée par AH, $= acr$.

Il eſt facile de rendre toutes ces propoſitions générales; ainſi on ne s'y arrêtera pas.

PROPOSITION XXXI.

PROBLEME.

90. TROUVER *la valeur du Solide formé par la révolution de l'eſpace hyperbolique* BAMFEC *autour de l'aſymptote* CE. FIG. 13.

Soit menée l'autre aſymptote $BC = r$, & deux ordonnées $PM = y$, Pm infiniment proches, ſoit $CP = x$, donc $Pp = dx$, $BA = a$, & la circonférence décrite par le point B, $= c$; Il eſt clair que les ordonnées PM,

pm décriront des surfaces cylindriques paralleles, & que ac est la valeur de celle qui est décrite par BA; & pour avoir celle qui est décrite par PM, on dira $CB \times BA$ (ar). ac, ou $r. c :: CP \times PM\ (xy)$. $\frac{cxy}{r} =$ à la surface cherchée; donc $\frac{cxydx}{r} =$ à la différentielle du Solide. Mais à cause de l'hyperbole $xy = ar$, donc $\frac{cxydx}{r} = acdx$, dont l'intégrale $= acx$ est la valeur du Solide décrit par l'espace $ECPMF$, ce qui donne acr pour le Solide entier, parce qu'en B, x devient $= r$.

COROLLAIRE.

91. Il est évident que ce Solide est double du cylindre formé par la révolution du rectangle AC, quoique cependant le Solide hyperbolique soit formé par un espace infini, ce qui est digne de remarque.

PROPOSITION XXI.

PROBLEME.

FIG. 13. 92. LES *mêmes choses étant posées, trouver la valeur du Solide formé par la révolution de l'espace hyperbolique autour de l'asymptote* CB.

Il est évident que les ordonnées décriront dans ce mouvement des surfaces circulaires paralleles, que l'on regarde comme les élemens dont ce Solide est composé. Et nommant c, la circonférence décrite par le point A, & AB, r, CB, a; on dira $r. c :: y. \frac{cy}{r}$, donc le cercle décrit par $PM = \frac{cyy}{2r}$, & $\frac{cyydx}{2r} =$ à la différentielle du Solide; Mais $xy = ar$ donc $yy = \frac{aarr}{xx}$, & mettant cette valeur à la place de yy, on aura $\frac{cyydx}{2r} = \frac{aacrdx}{2xx} = \frac{aacrx^{-2}dx}{2}$, dont l'intégrale $= \frac{aacr}{-2x}$ est la valeur ou partie de la valeur

leur du Solide décrit par l'eſpace $BAMP$, & cette intégrale devient $= \frac{acr}{2}$, lorſque $x = a$.

PROPOSITION XXII.

PROBLEME.

93. TROUVER *généralement la valeur de ces ſortes de Solides formez par la révolution d'une hyperbole autour de ſes aſymptotes* CE.

On a eu 1°. * pour la différentielle du Solide $\frac{cxydx}{r}$, mais à cauſe de l'hyperbole $y^m = x$, m marquant un nombre négatif entier ou rompu, donc $y = x^{\frac{1}{m}}$, donc $\frac{cxydx}{r} = \frac{cx^{\frac{1}{m}+1}dx}{r}$, dont l'intégrale $= \frac{mcx^{\frac{1}{m}+2}}{2m+1r} = \frac{mcxxy}{2m+1r}$ (en remettant pour $x^{\frac{1}{m}}$ ſa valeur y) ce qui donne pour le Solide entier $\frac{m}{2m+1}acr$. Ce qu'il falloit trouver. * *Art.* 90

On a eu 2°. pour la différentielle du Solide $\frac{cyydx}{2r}$: or $y^m = x$, donc $dx = my^{m-1}dy$, & mettant cette valeur pour dx dans $\frac{cyydx}{2r}$, on aura $\frac{mcy^{m+1}dy}{2r}$, dont l'intégrale $= \frac{mcy^{m+2}}{2m+4r} = \frac{mcxyy}{2m+4r} =$, ce qui donne pour le Solide entier $\frac{m}{2m+4}acr$, parce que x devenant a, y devient r. * *Art.* 92

PROPOSITION XXIII.

PROBLEME.

94. TROUVER *la valeur du conoïde hyperbolique formé par la révolution de l'hyperbole* A M B *autour de l'axe* A D.

FIG. 33.

Ayant mené la perpendiculaire $BD = r$, & une ordonnée quelconque $PM = y$, & une autre infiniment proche pm, il eſt évident qu'elles décriront des ſurfaces circulaires, dont la ſomme infinie eſt égale au Solide. Soit nommé l'axe traverſant Aa, $2b$; AD, a; donc $Da = a + 2b$, AP, x; donc $Pp = dx$, & $Pa = x + 2b$. On aura enſe ſervant de la méthode $\frac{\pi yy\,dx}{2r} =$ à la différentielle du Solide: Mais à cauſe de l'hyperbole $rr.aa + 2ab :: yy.xx + 2bx$, d'où l'on tire $yy = \frac{rrxx + 2brrx}{aa + 2ab}$, & mettant pour yy cette valeur dans $\frac{\pi yy\,dx}{2r}$, on aura $\frac{\pi rrx\,dx + 2\pi brx\,dx}{2aa + 4ab}$, dont l'intégrale $= \frac{\pi rx^3}{6aa + 12ab} + \frac{\pi brxx}{2aa + 4ab} = \frac{\pi rx^3 + 3\pi brxx}{6aa + 12ab}$ valeur du Solide formé par l'eſpace APM, ce qui donne $\frac{aa\pi r + 3ab\pi r}{6a + 12b}$ pour celle du Solide entier, parce qu'en D, x devient $= a$. Ce qu'il falloit trouver.

COROLLAIRE.

95. Il eſt évident que le cylindre circonſcrit eſt à ce conoïde hyperbolique comme $3a + 6b$ eſt à $a + 3b$: car le cylindre $= \frac{aa\pi r}{2}$; donc &c.

PROPOSITION XXIV.

PROBLEME.

96. TROUVER *la valeur du Solide formé par la révolution de l'espace hyperbolique* A M B D C *autour de* C D *moitié de l'axe conjugué de l'hyperbole* A M B. FIG. 14.

Si on conçoit que l'axe conjugué CD soit divisé en une infinité de parties, & que de tous ces points on mene les ordonnées PM, pm, il est évident qu'elles décriront en tournant des surfaces circulaires dont la somme est égale au Solide. Soit donc nommé CA, a; CD, b; CP, x, $Pp; dx$, Pm, y, & c la circonférence décrite par le point B, on aura $\frac{cy}{r}$ = à la circonférence décrite par le point M, & $\frac{cyy}{2r}$ = au cercle qui a pour rayon PM, & multipliant ce cercle par dx, on aura $\frac{cyydx}{2r}$ = à la différentielle du Solide. Mais à cause de l'hyperbole $xx.yy-aa.::bb.aa.$ donc $yy=\frac{aaxx+aabb}{bb}$ & mettant cette valeur dans $\frac{cyydx}{2r}$, on aura $\frac{aacxxdx+aabbcdx}{2bbr}$, dont l'intégrale $=\frac{aacx^3}{6bbr}+\frac{aacx}{2r}$, & mettant pour aa sa valeur $\frac{bbyy}{xx+yy}$, il viendra $\frac{cx^3yy}{6rxx+6bbr}+\frac{bbcyyx}{2rxx+2bbr}$ pour la valeur du Solide formé par l'espace $AMPC$, & pour celle du Solide entier $\frac{bcr}{3}$, parce qu'alors x devient $=b$, & $y=r$. Ce qu'il falloit, &c.

COROLLAIRE.

97. Il est évident que le cylindre circonscrit est à ce Solide comme 3 est à 2: car $\frac{bcr}{2}.\frac{bcr}{3}::3.2.$

REMARQUE.

LE Solide formé par la révolution d'une hyperbole autour de son axe conjugué meriteroit une attention parti-

culiere : Car outre qu'on le peut former par une ligne droite, où par le taillant rectiligne d'un ciseau appliqué au tour, on peut y considérer les cinq Sections du cone, & de plus le parallelogramme rectangle. Car il est facile de démontrer 1°. que si on coupe ce Solide par un plan parallele à l'axe, & qui passe par le sommet de l'hyperbole génératrice, la section sera un triangle ou des triangles opposez. 2°. Si on le coupe par un plan perpendiculaire à l'axe, la section sera un cercle, 3°. Que si on le coupe par un plan parallele aux asymptotes, la section sera une parabole, dont le sommet sera dans le point où le plan qui coupe la courbe génératrice. 4°. Si on le coupe par un plan qui fasse avec l'axe un angle plus grand que celui que fait l'asymptote, la section sera un ellipse. 5° Si on le coupe par un plan qui fasse avec l'axe un angle plus aigu que celui que fait l'asymptote, la section sera une hyperbole ou des hyperboles opposées. 6°. Enfin si on le coupe par un plan qui passe par l'asymptote même, la section sera un parallelogramme rectangle.

PROPOSITION XXV.

PROBLEME.

98. TROUVER *la valeur du Sphéroide allongé formé par la révolution de la demi-ellipse* A B D *autour de son grand axe* A D. FIG. 35.

Ayant mené le petit axe $BE = 2r$, perpendiculaire sur $AD = 2a$, & tiré une ordonnée quelconque $PM = y$, & une autre infiniment proche pm, il est clair qu'elles décriront en tournant des surfaces circulaires. Soit $CP = x$, donc $AP = a - x$, $PD = a + x$, & $Pp = dx$: on aura donc $\frac{cyy}{2r}$ = au cercle décrit par l'ordonnée MP, & $\frac{cyydx}{2r}$ = à la différentielle du Solide. Mais à cause de l'ellipse $\overline{MP}^2$ (yy). $AP \times PD$ $(aa - xx)$ :: $\overline{BC}^2$ (rr). AC (aa). D'où l'on tire $yy = rr - \frac{rrxx}{aa}$, & mettant

cette valeur dans $\frac{cyydx}{2r}$, on aura $\frac{crdx}{2} - \frac{crxxdx}{2aa}$, dont l'intégrale $= \frac{crx}{2} - \frac{crx^3}{6aa}$ valeur du Solide formé par l'espace $BCPM$, ce qui donne $\frac{acr}{3}$ pour le Solide formé par $AMBCA$, parce qu'en A, x devient $= a$, dont le double ou le Solide entier $= \frac{2acr}{3}$. Ce qu'il falloit trouver.

COROLLAIRE I.

99. Il est évident 1°. que le sphéroïde allongé est au cylindre circonscrit comme 2 est à 3. Et comme le cylindre est au cone comme 3 est à 1; donc le sphéroïde est au cone comme 2 est à 1.

COROLLAIRE II.

100. Le sphéroïde est à la sphere qui lui est circonscrite comme le quarré du petit axe de l'ellipse est au quarré du grand. Car si on mene des ordonnées à l'ellipse & au cercle, il est clair qu'elles décriront en tournant, des cercles qui seront entr'eux comme les quarrez de ces mêmes ordonnées : Mais par la nature de l'ellipse le quarré d'une de ses ordonnées quelconque est au rectangle des parties de son axe; c'est à dire au quarré de l'ordonnée au cercle, comme le quarré du petit axe est au quarré du grand. Donc la somme de tous ces cercles, qui sont les élemens dont ce sphéroïde est composé, est la somme de tous les cercles qui composent la sphere, comme le quarré du petit axe est au quarré du grand; donc &c.

Il est manifeste qu'un segment quelconque de sphéroïde est au segment de sphére correspondant, comme le quarré du petit axe est au quarré du grand.

COROLLAIRE III.

101. Le spheroïde est à la sphere qui lui est inscrite comme le grand axe est au petit. Car si l'on mene des

ordonnées au petit axe de l'ellipſe, il eſt clair qu'elles décriront en tournant des ſurfaces cylindriques qui ſeront entr'elles en raiſon compoſée de leurs rayons & de leurs hauteurs, c'eſt à dire qui ſeront entr'elles comme les ordonnées de l'ellipſe & du cercle. Donc la ſomme de toutes les ſurfaces cylindriques qui ſont les élemens dont le ſphéroïde eſt compoſé, eſt à la ſomme des ſurfaces cylindriques qui compoſent la ſphere, comme le grand axe eſt au petit; donc.

Il eſt clair qu'un ſegment quelconque de ſphéroïde eſt au ſegment correſpondant de la ſphere inſcrite comme le grand axe de l'ellipſe eſt au petit.

COROLLAIRE IV.

102. Il eſt encore évident 1°. que la ſphere & le ſphéroïde ſont en même raiſon par rapport à leurs cylindres circonſcrits. 2°. Que la ſphere & le ſphéroïde ſont en même raiſon que les cones inſcrits à leurs cylindres circonſcrits bâtis ſur leurs grands cercles & de même hauteur qu'eux.

Il eſt facile par là de trouver la valeur d'un ſegment de ſphéroïde elliptique, & d'une de ſes portions quelconques coupée par deux plans paralleles.

On démontrera de même que le ſphéroïde applati formé par la révolution de l'ellipſe autour de ſon petit axe eſt au cylindre circonſcrit comme 2 eſt à 3. Et on tirera les mêmes concluſions.

Delà il ſuit que le ſphéroïde oblong eſt au ſphéroïde applati comme le petit axe de l'ellipſe eſt au grand.

PROPOSITION XXVI.

PROBLEME.

FIG. 17. 103. TROUVER *la valeur du Solide formé par la révolution de l'eſpace logarithmique* AMBCE *autour de l'aſymptote* CE.

Si l'on conçoit que l'asymptote CE soit divisée en une infinité de parties égales, & que de tous ces points on mene des ordonnées PM, pm, il est clair qu'elles décriront des cercles paralleles qui seront les élemens du Solide. Soit $CB = r$, $PM = y$, & $c =$ à la circonférence décrite par le point B; on aura $\frac{cyy}{2r} =$ au cercle qui a pour rayon PM, & $\frac{cyydx}{2r} =$ à la différentielle du Solide. Mais par la proprieté de la logarithmique $dx = \frac{ady}{y}$, donc $\frac{cyydx}{2r} = \frac{acydy}{2r}$, dont l'intégrale $= \frac{acyy}{+r} =$ au Solide formé par l'espace infiniment long $EPMA$, ce qui donne $\frac{acr}{4}$ pour le Solide entier que l'on demandoit, parce qu'en CB, y devient $= r$.

COROLLAIRE.

104. Il est évident que le Solide formé par cet espace infini est au cone qui a pour hauteur la soutangente de la courbe, & pour base celle du Solide comme 3 à 2. Car ce cone $= \frac{acr}{6}$; donc &c.

PROPOSITION XXVII.

PROBLEME.

105. TROUVER *la valeur du Solide formé par la révolution de l'espace* A M B *autour de l axe* A B, *& dont la nature de la courbe est exprimée par cette équation générale* $y = \frac{\overline{a - xxx}^{\frac{m}{n}}}{a^{\frac{m}{n}}}$. FIG. 21.

On déterminera 1°. le point de la plus grande largeur de la courbe, & puis menant une ordonnée à ce point que j'appelle r, & tirant d'autres ordonnées paralleles PM, pm; $= y$; elles décriront en tournant des cercles;

& on aura pour celui qui eſt décrit par PM, $\frac{cyy}{2r}$, & pour la différentielle du Solide $\frac{cyydx}{2r}$. Mais $y = \frac{\overline{a-x} \times x^{\frac{m}{n}}}{a^{\frac{m}{n}}}$, donc $yy = \frac{aax^{\frac{2m}{n}} - 2ax^{\frac{2m}{n}+1} + x^{\frac{2m}{n}+2}}{a^{\frac{2m}{n}}}$, & mettant cette valeur dans $\frac{cyydx}{2r}$, il viendra $\frac{aacx^{\frac{2m}{n}}dx - 2acx^{\frac{2m}{n}+1}dx + cx^{\frac{2m}{n}+2}dx}{2ra^{\frac{2m}{n}}}$ dont l'intégrale qui eſt la valeur du Solide formé par AMP, $= \frac{naacx^{\frac{2m}{n}+1}}{4m+2nr \times a^{\frac{2m}{n}}} - \frac{nacx^{\frac{2m}{n}+2}}{2m+2nr \times a^{\frac{2m}{n}}} + \frac{ncx^{\frac{2m}{n}+3}}{4m+6nr \times a^{\frac{2m}{n}}}$; ce qui donne pour celle du Solide entier décrit par l'eſpace AMB $\frac{na^3c}{4m+2nr} - \frac{na^3c}{2m+2nr} + \frac{na^3c}{4m+6nr} = \frac{n^3a^3c}{8m^3+24mmn+22mnn}$ parce que P en B, x devient $= a$.

Si $m = 2$, & $n = 1$, on trouvera pour le Solide formé par AMP, $\frac{cx^5}{10aar} - \frac{cx^6}{6a^3r} + \frac{cx^7}{14a^4r}$, & pour celle du Solide entier $\frac{a^3c}{210r}$. Or par la méthode *de maximis & minimis*, x étant égale à $\frac{3}{7}a$, on aura en mettant cette valeur dans l'équation à la courbe $aay = axx - x^3$, pour la plus grande des ordonnées $y = r$, $\frac{4}{27}a$. Ainſi $\frac{a^3c}{210r} = \frac{9aac}{280}$. Or le cylindre circonſcrit à ce Solide, ayant pour rayon de ſa baſe la plus grande des ordonnées, & pour hauteur l'axe AB, ſa valeur ſera $\frac{3}{27}aac$; donc le Solide formé par la révolution de la courbe AMB eſt au cylindre circonſcrit comme 243 eſt à 560.

On trouvera avec la même facilité la valeur des Solides formez par la révolution des courbes AND, AQB, & le rapport qu'ils ont entr'eux.

PROP. XXVIII.

PROPOSITION XXVIII.

PROBLEME.

106. LES *mêmes choſes étant poſées que dans l'*article 34. *trouver le Solide formé par la révolution du ſegment* AFBA *autour de* HI *parallele & égale à* AB. FIG. 11.

On achevera le parallelogramme AI, & en ſuppoſant que tout l'eſpace $HAFBI$ tourne ſur HI, on cherchera la valeur du Solide entier fait par la révolution de cet eſpace en cette maniere.

Soit d'un point quelconque N de l'arc AFB menée l'ordonnée NP prolongée juſqu'en Q, & une autre infiniment proche nq, il eſt clair que ces lignes décriront des cercles qui ſeront les élemens du Solide. Nommant donc c, la circonférence décrite par le point F; NP, z; PQ, r; donc $NQ = r + z$, AP, x; donc Pp ou $Qq = dx$; on dira $FE(r\sqrt{2}).\ c :: NQ(r+z).\ \frac{cr+cz}{r\sqrt{2}} =$ à la circonférence décrite par le point N, & multipliant par $\frac{rdx+zdx}{2}$, on aura $\frac{crrdx+2crzdx+czzdx}{2r\sqrt{2}} =$ à la différentielle du Solide : Mais $\overline{NQ}^2 - \overline{PQ}^2 = AP \times PB$, c'eſt-à-dire $2rz + zz = 2rx - xx$, mettant donc cette valeur à la place de $2rz + zz$, il viendra $\frac{crrdx+2crxdx-cxxdx}{2r\sqrt{2}}$ dont l'intégrale $= \frac{crx}{2\sqrt{2}} + \frac{cxx}{2\sqrt{2}} - \frac{cx^3}{6r\sqrt{2}}$ eſt égale au Solide formé par l'eſpace $HANQ$, ce qui donne $\frac{crr}{\sqrt{2}} + \frac{2crr}{6\sqrt{2}} - \frac{4crr}{3\sqrt{2}}$ pour la valeur du Solide entier, parce qu'en B, x devient $= 2r$.

Il eſt évident que le premier membre $\frac{crr}{\sqrt{2}}$ eſt égal au cylindre décrit par la révolution du rectangle AI autour de HI, & que les deux autres $\frac{2crr}{\sqrt{2}} - \frac{4crr}{3\sqrt{2}} = \frac{2crr}{3\sqrt{2}}$ ſont

égaux à la ſphere décrite par la révolution du demi-cercle ADB autour de AB, car en ce cas la circonférence $= \frac{c}{\sqrt{2}}$. Donc le Solide formé par le ſegment $AFBA$ eſt égal à la ſphere formée par le demi-cercle ADB. Ce qu'il falloit trouver.

PROPOSITION XXIX.

PROBLEME.

FIG. 11. 107. LES *mêmes choſes étant poſées trouver la valeur d'un Solide formé par la révolution de la Lunule autour de* HI.

Suppoſant que la figure entiere $HADBI$ tourne ſur HI, elle décrira un Solide dont on cherchera la valeur en cette ſorte.

Soient prolongées les lignes QN, qn juſqu'en M & m, elles décriront en tournant des cercles paralleles. Et nommant DE, $2r$, MP, y; donc $MQ = r + y$, & c, la circonférence décrite par le point D; on dira $2r.c :: r+y.\frac{cr+cy}{2r} =$ à la circonférence décrite par le point M, donc $\frac{crr+2cry+cyy}{4r} =$ au cercle décrit par MQ; mais $yy = 2rx - xx$, & $y = \sqrt{2rx - xx}$; mettant donc ces valeurs & multipliant par dx, on aura $\frac{crr\,dx + 2crx\,dx - cxx\,dx + 2cr\,dx\sqrt{2rx-xx}}{4r}$ $=$ à la différentielle du Solide, dont l'intégrale $= \frac{crx}{4} + \frac{cxx}{4} - \frac{cx^3}{12r} +$ l'intégrale de $\frac{c\,dx\sqrt{2rx-xx}}{2} = \frac{crx}{4} + \frac{cxx}{4} - \frac{cx^3}{12r} + \frac{c}{2} \times APMA$ eſt la valeur de la portion indéterminée du Solide décrit par l'eſpace $HAMQ$; ce qui donne $\frac{crr}{2} + crr - \frac{2}{3}crr + \frac{c}{2} \times ADBA = \frac{crr}{2} + \frac{2}{3}crr + \frac{ccr}{16}$, (car l'eſpace $ADBA = \frac{cr}{8}$) pour celle du Solide entier, parce qu'alors x devient $= 2r$. Or le pre-

mier membre $\frac{crr}{2}$ eſt égal au cylindre décrit par le rectangle AI, car ſa circonférence $= \frac{c}{2}$, donc les deux autres membres $\frac{1}{3}crr + \frac{1}{10}ccr$ valent le Solide formé par la révolution du demi-cercle ADB autour de HI: ôtant donc de cette valeur, celle du Solide formé par le ſegment $AFBA$ que l'on a trouvé dans le problême précedent valoir la ſphere ($\frac{1}{3}crr$) décrite par le demi-cercle ADB, le reſte $\frac{1}{10}ccr$ ſera la valeur de celui qui eſt formé par la révolution de la Lunule. Ce qu'il falloit trouver.

Il eſt évident que ſi l'on déterminoit exactement la valeur de ce Solide, on auroit la quadrature du cercle.

PROPOSITION XXX.

PROBLEME.

108. TROUVER *le Solide formé par la révolution de l'eſpace Ciſſoïdal autour de ſon aſymptote* BF.

Les mêmes choſes étant poſées que dans *l'article* 55. toutes les ordonnées PN à la Ciſſoïde décrivant des ſurfaces cylindriques, on dira $r.c :: PB \times PN(x\sqrt{2rx-xx})$. $\frac{cx\sqrt{2rx-xx}}{r}$ = à la ſurface décrite par PN, & $\frac{cxdx\sqrt{2rx-xx}}{r}$ = à la différentielle du Solide. FIG. 24

Pour avoir ſon intégrale, ſoit entendu le demi-cercle générateur AMB tourner autour d'un axe parallele à l'aſymptote BF, & qui paſſe par le point A, toutes les ordonnées PM décriront encore des ſurfaces cylindriques; ainſi on aura $\frac{cxdx\sqrt{2rx-xx}}{r}$ pour la différentielle de ce Solide, laquelle étant la même que celle du Solide précedent, il eſt clair que le Solide formé par la révolution de l'eſpace ciſſoïdal infiniment étendu, autour de ſon aſympote eſt égal au Solide formé par la révolution de ſon demi-cercle générateur autour d'une droite parallele à l'aſymptote paſſant par le point A.

PROPOSITION XXXI.

PROBLEME.

FIG. 36. 109. TROUVER *la valeur du Solide formé par la révolution de l'eſpace Conchoïdal* B M A D E *autour de l'aſymptote.* D E.

Soit la Conchoïde *A M B* telle qu'ayant mené d'un de ſes points quelconques *M* au pole *C*, la droite *M C*, qui coupe l'aſymptote en *K*, le rectangle de $CK \times KM$ ſoit toûjours égal au rectangle de $CD \times DA$. On demande la valeur du Solide formé par cet eſpace conchoïdal.

Ayant décrit du diametre *A D* le demi-cercle *A N D*, & d'un point quelconque *P* de ce diametre ayant mené l'ordonnée *P M*, & une autre infiniment proche *p m*; il eſt clair qu'elles décriront en tournant des ſurfaces cylindriques paralleles.

Soit donc $AC = a$; $AD = 2r$; $AP = x$, donc $CP = a - x$, $PD = 2r - x$, & $Pp = dx$; $PM = z$; $PN = y$; on aura par la proprieté de la conchoïde $AP(x).\ PD\ (2r - x) :: \overline{PM}^2 (zz).\ \overline{CP}^2 (aa - 2ax + xx)$; donc $zz \times 2r - x = aax - 2axx + x^3$, d'où l'on tire $z = \overline{a-x}\sqrt{\frac{x}{2r-x}}$. Et pour avoir la ſurface cylindrique décrite par *P M*, on dira $r.c :: PD \times PM \left(\overline{2r-x} \times \overline{a-x}\sqrt{\frac{x}{2r-x}}\right)$. $\frac{2acr - acx - crx + cxx}{r}\sqrt{\frac{r}{2r-x}} =$ à la ſurface cherchée, & multipliant par dx, on aura la valeur du petit Solide qui a pour hauteur *P p*.

Pour avoir l'intégrale de cette differentielle, ſoit entendu le demi-cercle *A N D* tourner autour d'une ligne parallele à l'aſymptote *D E* paſſant par le pole *C* de la conchoïde, il eſt clair que toutes les lignes *P N* décrivent auſſi des ſurfaces cylindriques paralleles. On dira donc

$r.c :: PN \times PC\,(\overline{a-x}\sqrt{2rx-xx}).\frac{\overline{a-x}\sqrt{2rx-xx}}{r} =$ à la surface cylindrique décrite par PN. Mais $NP \times PC\,(\overline{a-x}\sqrt{2rx-xx}) = PD \times PM\left(\overline{2r-x} \times \overline{a-x}\sqrt{\frac{x}{2r-x}}\right)$

Car $AP.PD :: \overline{PN}^2.\overline{PD}^2$; donc $PN.PD :: PM.CP$: Donc les différentielles de ces deux Solides sont égales, donc leurs intégrales, c'eſt-à-dire les ſommes des élemens qui compoſent ces Solides, ſont auſſi égales: Donc le Solide formé par la révolution de l'eſpace conchoïdal infiniment étendu, autour de ſon aſymptote eſt égal au Solide formé par la révolution du demi-cercle AND autour de la parallele à l'aſympote paſſant par le pole C. Ce qu'il falloit trouver.

SECTION TROISIÉME.

DES CENTRES DE PESANTEUR.

IL y a dans tous les corps qu'on nomme peſans, une certaine partie, laquelle étant en repos, toutes les autres qui l'environnent dans des diſtances réciproquement proportionnelles à leurs maſſes, demeurent immobiles. Cette partie n'ayant aucune grandeur déterminée à cauſe de la diviſibilité de la matiére à l'infini, on la regarde comme un point qu'on nomme centre de peſanteur. Ainſi le centre de peſanteur d'un corps eſt un point dans lequel on conſidére que le poids de toutes les petites parties dont le corps eſt compoſé, eſt tellement réüni, que ſi on le ſoûtenoit ou ſi on le ſuſpendoit par ce point, il demeureroit toûjours en équilibre. Si donc un corps eſt ſoûtenu par un autre point que celui par où la ligne qui joint ſon centre de peſanteur, ne paſſe pas, il eſt évident qu'il ne demeurera pas immobile, & qu'il ſe mouvra juſqu'à ce que cette ligne paſſant par le centre de peſanteur, ſe trouve étant prolongée perpendiculaire à la ſurface de la terre: car concevant que toute la peſanteur de ce corps eſt réünie dans ce point, elle le pouſſe toûjours vers le centre de la terre, ainſi il faut qu'il en approche le plus qu'il eſt poſſible.

Des corps ou ce qui eſt la même choſe des poids ſont dits être en équilibre, lors qu'étant ſuſpendus aux bras d'une ligne infléxible, conſidérée ſans peſanteur, & poſée librement ſur un appui, ils ſont entr'eux en raiſon réciproque des diſtances du point d'appui, c'eſt-à-dire lorſqu'un des poids eſt à l'autre comme la diſtance entre l'ap-

pui & l'un des poids eſt à la diſtance entre l'appui & l'autre poids.

On ne s'arrêtera pas à démontrer ce premier principe de Méchanique : car comme on en a déja donné un grand nombre de démonſtrations, celle que l'on pourroit ajoûter, ne différeroit guéres de celles que l'on a déja.

Il eſt facile par ce principe de trouver le centre de peſanteur de deux corps enfilez par une ligne droite qui paſſe par leur centre de peſanteur : car ſi on la diviſe en raiſon réciproque de leur poids, le point de diviſion ſera le centre de peſanteur qu'on cherche.

S'il y avoit pluſieurs poids enfilez par cette droite, on trouveroit d'abord le centre de peſanteur des deux premiers, puis les regardant comme n'en faiſant qu'un, on cherchera le centre de peſanteur commun de ces deux poids avec le troiſiéme, & les regardant encore comme n'en faiſant qu'un, on cherchera leur centre de peſanteur commun avec le quatriéme, & ainſi de ſuite. Cela eſt évident, puiſque tous les poids en divers diſtances font le même effort que s'ils étoient réünis dans leur centre de peſanteur.

On appelle axe ou plan de balancement, la ligne ou le plan qui paſſe par le point de ſuſpenſion de la figure, & autour duquel on conçoit qu'elle eſt balancée.

Le moment d'un corps ou ſa force relative, c'eſt le produit de ſa maſſe par la diſtance de l'axe de balancement au centre de peſanteur, & on appelle cette diſtance ſon bras.

REGLE GENERALE. Pour trouver le centre de peſanteur de quelque grandeur que ce ſoit, il faut la conſiderer comme compoſée d'une infinité de petites parties, que l'on regardera comme autant de poids attachez à un bras de balance commun ; ainſi prenant la ſomme des momens de tous ces poids, & la diviſant par la ſomme des poids, le quotient déterminera le centre de peſanteur de toutes ces parties.

Si une ligne, un plan, ou un Solide quelconque ſont

coupez par le milieu, par une ligne ou par un plan en telle ſorte que toutes les parties d'un ſegment ſoient égales aux parties reſpectives de l'autre, & également éloignées de cette ligne ou de ce plan, il eſt évident que le centre de peſanteur de toutes ces figures doit être dans cette ligne ou dans ce plan.

Ainſi le centre de peſanteur d'un triangle, d'un parallelogramme, d'un polygone régulier, d'un cercle, d'une ellipſe, d'une portion de cercle, d'ellipſe, d'une parabole, d'une hyperbole, d'un priſme, d'un cylindre, d'une pyramide, d'un cone, d'une ſphere, d'un ſphéroïde, d'un conoïde ou d'une portion quelconque, ſe trouve dans une ligne ou dans un plan qui paſſe par quelque diametre que ce ſoit de ces figures; c'eſt-à-dire par une ligne qui en traverſe par le milieu les coupes paralleles à la bare. De-là il eſt facile d'avoir le centre de peſanteur d'un triangle, d'un parallélogramme, d'un polygone, d'un cercle, d'une ellipſe, d'une ſphere, d'un ſphéroïde, d'un cube & de toutes ſortes de figures qui ont pluſieurs diametres qui concourent en un même point; car ce centre ſe trouve dans leur concours.

PROPOSITION I.

PROBLEME.

110. TROUVER *le centre de peſanteur d'une ligne,*

FIG. 37. Soit la ligne $AB = x$, & une de ſes parties infiniment petite $= dx$, on aura $x\,dx$ pour la differentielle des momens, dont l'intégrale $= \frac{xx}{2}$ ſera la ſomme des momens, laquelle étant diviſée par la ſomme des poids $= x$, donnera $\frac{1}{2}x$; c'eſt-à-dire que ſi on diviſe cette ligne en deux parties égales, le point de diviſion ſera le centre de peſanteur de la ligne.

PROPOS. II.

PROPOSITION II.

PROBLEME.

111. TROUVER *le centre de pesanteur d'un parallelogramme* A B C D. FIG. 38

Il est évident que ce centre se doit trouver sur la ligne EF qui divise ce parallelogramme en deux parties égales. Soit AD ou $EF = a$, $EP = x$, donc $Pp = dx$, $AB = b$; on aura $b\,dx =$ à la différentielle des poids, & multipliant par le bras x, on aura $bx\,dx =$ à la différentielle des momens, dont l'intégralle $= \frac{bxx}{2}$, laquelle étant divisée par $bx =$ à la somme des poids, donnera $\frac{x}{2}$ pour le centre de pesanteur du parallélogramme AM, ce qui donne $\frac{a}{2}$ pour celui du parallélogramme entier que l'on cherchoit, parce qu'en F, x devient $= a$.

PROPOSITION III.

PROBLEME.

112. TROUVER *le centre de pesanteur d'un triangle isoscele.*

Soit le triangle isoscele BAC, du sommet A on abaissera la perpendiculaire AD, qui divisera le triangle en deux parties égales; ainsi c'est sur cette ligne que doit se trouver le centre de pesanteur de ce triangle. Soit menée une ligne quelconque $MM = y$ parallele a la base $BC = b$, & une autre mm infiniment proche, & soit $AD = a$ $AP = x$, donc $Pp = dx$; & $y\,dx =$ à la differentielle des poids; mais à cause des triangles semblables AMM, ABC, $x.y :: a.b$, donc $y = \frac{bx}{a}$, & $y\,dx = \frac{bx\,dx}{a}$, & multipliant cette grandeur par son bras $= x$, on aura $= \frac{bxx\,dx}{a} =$ à la différentielle des momens, dont l'intégrale $= \frac{bx^3}{3a}$, laquelle FIG. 39

étant diviſée par la ſomme des poids $= \frac{bxx}{2a}$, il viendra $\frac{2}{3}x$ pour la diſtance de l'axe de balancement qui paſſe par le ſommet A au centre de peſanteur du triangle MAM; ce qui donnera $\frac{2}{3}a$ pour celle du triangle BAC parce qu'en D, x devient $= a$.

PROPOSITION IV.

PROBLEME.

FIG. 40. 113. TROUVER *le centre de peſanteur de tout triangle.*

Soit un triangle quelconque BAC, ayant abaiſſé du ſommet A la ligne $AD = a$, qui diviſe le triangle en deux parties égales, il eſt viſible que le centre de peſanteur doit ſe trouver ſur cette ligne. Soit menée $AR = h$ perpendiculaire, & $MM = y$ parallele à la baſe $BC = b$, & une autre infiniment proche mm. Soit $AP = x$, $AQ = z$, donc $Qq = dz$. On aura pour la différentielle des poids $y\,dz$, & à cauſe des triangles ſemblables AQP, ARD. $z, x :: h. a$, donc $z = \frac{hx}{a}$, & $dz = \frac{h\,dx}{a}$, ſubſtituant cette valeur à la place de dz dans $y\,dz$, on aura $\frac{by\,dx}{a}$; mais à cauſe des triangles ſemblables MAM, BAC, $y = \frac{bx}{a}$, donc $\frac{by\,dx}{a} = \frac{bbx\,dx}{aa}$, & multipliant cette grandeur par ſon bras $= x$, on aura $\frac{bbx\,x\,dx}{aa}$ qui ſera la differentielle des momens, dont l'intégrale qui eſt la ſomme des momens $= \frac{bbx^3}{3aa}$, laquelle étant diviſée par la ſomme des poids $= \frac{bxx}{2aa}$ donnera $\frac{2}{3}x$ pour la diſtance du ſommet A au centre de peſanteur du triangle MAM, & $\frac{2}{3}a$ pour celle du triangle entier BAC, parce qu'en D, x devient $= a$. Il eſt donc évident que ſi on diviſe la ligne qui partage le triangle en deux également, en telle ſorte que la partie AP priſe du ſommet A de ce triangle, ſoit à la toute

Digitized by Google

AD comme 2 eſt à 3, on aura le point P pour ſon centre de peſanteur.

COROLLAIRE.

114. On peut trouver facilement le centre de peſanteur de la ſurface d'une pyramide & d'un cone droit, puiſque ces ſurfaces ſont compoſées de triangles dont on connoît le centre de peſanteur.

PROPOSITION V.

PROBLEME.

115. TROUVER *le centre de peſanteur d'un arc de cercle.* FIG. 10.

Soit 1°. l'arc de cercle EBF moindre que la demi-circonférence, dont on demande le centre de peſanteur. Il eſt évident que ce centre doit ſe trouver ſur le rayon qui diviſe cet arc par le milieu. Car ſi on tire une infinité de cordes paralleles à EF, elles diviſeront l'arc EBF en une infinité de petits arcs égaux, que l'on peut regarder comme autant de poids attachez à des bras de balance qui ſont toutes ces cordes diviſées en deux parties égales par le rayon qui coupe l'arc par la moitié.

Maintenant pour trouver le centre de peſanteur de l'arc ſur ce rayon, ſoit mené le diametre AD parallele à la corde EF, & l'ordonnée MP, & une autre infiniment proche mp, & ſoit tiré le rayon CM. Ayant nommé le diametre AD, $2r$, que je prens pour l'axe de balancement; la corde EF, $2a$; l'arc EBF, $2c$; l'ordonnée MP, y; & CP, x; donc $Pp = dx$, l'arc BM, z; donc $Mm = dz$, & multipliant dz par le bras $MP = y$, on aura pour le moment différentiel $y\,dz = r\,dx$; car à cauſe des triangles ſemblables CPM, MRm, $PM\ (y)$. $CM\ (r) :: MR\ (dx)$. $Mm\ (dz)$: prenant donc l'intégrale de $r\,dx$, on aura pour la ſomme des momens rx, laquelle étant diviſée par la ſomme des poids $= BM = z$,

donnera $\frac{rz}{z}$ pour la distance du diametre AD au centre de pesanteur de l'arc MB, ce qui donne $\frac{ar}{c}$ pour celle de ce même diametre AD au centre de pesanteur de l'arc EBF, parce que z devenant c, x devient a.

COROLLAIRE.

116. Il est évident 1°. que la distance du centre de pesanteur d'un arc de cercle au centre de ce cercle est au rayon, comme la corde de cet arc est à l'arc; & dans la demi-circonférence, comme le diametre du cercle est à la demi-circonférence.

2°. Que la raison de la corde à son arc étant donnée, on a le centre de pesanteur de l'arc, & réciproquement le centre de pesanteur d'un arc de cercle quelconque étant donné, on a la raison de cet arc à la corde, & par conséquent le rapport du diametre à la circonférence, ce qu'on appelle la quadrature du cercle.

Si l'on suppose maintenant 3°. que l'arc de cercle soit plus grand que la demi-circonférence, on trouvera la même chose en faisant à peu près les mêmes raisonnemens. Ou bien comme ce centre doit se trouver sur le même rayon prolongé, & qu'on a le centre de pesanteur de tout le cercle, on dira comme l'arc EGF est à l'arc EBF, ainsi la distance du centre du cercle au centre de pesanteur de l'arc EBF est à la distance cherchée du centre de pesanteur de l'arc EGF, au centre du cercle. Il est évident que les centres de pesanteur d'arcs semblables de différens cercles divisent leurs rayons en même raison.

Le centre de pesanteur d'un arc de cercle étant donné, il sera facile d'avoir le centre de pesanteur d'une portion quelconque de la surface d'un cylindre droit comprise par deux droites perpendiculaires sur la base. Car ce centre doit se trouver dans le milieu de la droite qui joint les centres de pesanteur des arcs des bases opposées.

On pourroit dire la même choſe des autres ſolides qui ont pour le circuit de leurs baſes, des courbes, ſi on avoit le centre de peſanteur de ces courbes.

Ce qu'on vient de dire des cylindres droits, pourroit s'étendre aux ſurfaces des cylindres obliques : car on démontre en Géometrie que la ſurface d'un cylindre droit eſt à la ſurface d'un cylindre oblique de même côté & de même baſe, comme le contour de la baſe eſt au contour de la ſection, qui eſt perpendiculaire à l'axe. Ce qui ſe doit auſſi entendre des parties correſpondantes.

PROPOSITION VI.

PROBLEME.

117. TROUVER *le centre de peſanteur d'un ſecteur de cercle.*

Soit un ſecteur du cercle quelconque MCM, dont on demande le centre de peſanteur : il eſt évident qu'il eſt compoſé d'une infinité de petits ſecteurs tels que MCm, que l'on peut conſiderer comme autant de triangles rectilignes, à cauſe de l'infinie petiteſſe des arcs Mm. Mais le centre de peſanteur d'un triangle * eſt diſtant de ſon ſommet des deux tiers de ſa hauteur : ſi donc du rayon $CQ = \frac{2}{3} CM$ on décrit l'arc QPQ, il eſt clair que les centres de peſanteur de tous les petits triangles qui rempliſſent le ſecteur ſe trouveront ſur cet arc. Conſiderant donc tous les points de cet arc également chargez, puiſqu'ils ſoûtiennent par le centre de peſanteur des triangles égaux, on voit évidemment que le centre de peſanteur de l'arc QPQ ainſi chargé ſera le même que celui du ſecteur MCM. Faiſant donc comme l'arc QPQ eſt à ſa corde, ou l'arc MAM à la ſienne, ainſi CQ ou $\frac{2}{3} AC$ eſt à la diſtance du centre C du cercle au centre de peſanteur de cet arc QPQ, lequel eſt auſſi celui du ſecteur MCM. FIG. 41.

* Art. 114.

Ou bien on dira comme la diſtance du centre de pe-

ſanteur de l'arc MAM au centre C du cercle, eſt à celle du centre de peſanteur de l'arc QPQ ou du ſecteur MCM, à ce même centre C, ainſi la corde MM eſt à la corde QQ, c'eſt-à-dire : $MC.QC :: 1.\frac{2}{3}$; de ſorte que celle de l'arc MAM étant * $= \frac{MM \times AC}{MAM}$, l'on aura celle du ſecteur MAC, $= \frac{2MM \times AC}{3MAM}$.

* Art. 115.

AUTRE MANIERE.

FIG. 46. 118. AYANT décrit librement du centre C l'arc QPQ, & mené les cordes MM, QQ, on nommera le rayon CM, r; la corde MM, $2a$; l'arc MAM, $2c$; & le rayon indéterminé CQ, x; & ayant décrit un autre arc qpq infiniment proche, on aura $Qq = dx$.

* Art. 115. Or il eſt évident * que le moment de l'arc MAM par rapport au diametre eſt à celui de l'arc QPQ en raiſon compoſée de la corde MM à la corde QQ, & du rayon CM au rayon CQ, c'eſt-à-dire comme rr eſt à xx, puiſque ces deux raiſons ſont égales : Ainſi pour avoir le moment de l'arc QPQ, on dira comme rr eſt à xx, ainſi le moment de l'arc $MAM = 2ar$ eſt au moment de l'arc $QPQ = \frac{2aax}{r}$, & multipliant par dx, on aura $\frac{2axxdx}{r} =$ au moment de la portion annulaire infiniment petite du ſecteur ſphérique ; dont l'intégrale $= \frac{2ax^3}{3r}$, laquelle étant diviſée par cr valeur du Secteur, donne $\frac{2ax^3}{3crr}$ pour la diſtance cherchée du centre de peſanteur du ſecteur QCQ, & $\frac{2ar}{3c}$ pour celle du ſecteur MCM; parce que Q étant en M, x devient r. D'où l'on peut tirer cette concluſion, que le centre de peſanteur d'un ſecteur de cercle eſt ſitué ſur le rayon qui le diviſe par le milieu, en telle ſorte que ſa diſtance du centre du cercle eſt aux deux tiers du rayon, comme la corde eſt à l'arc.

Ainſi dans le demi-cercle, comme la demi circonférence eſt à ſa corde, c'eſt-à-dire au diametre du cercle,

ainſi les deux tiers du rayon eſt à la diſtance du centre de peſanteur du demi-cercle.

COROLLAIRE.

119. Il eſt évident que connoiſſant le centre de peſanteur du ſecteur MCM, & du triangle MCM, on connoîtra auſſi le centre de peſanteur du ſegment MAM, Il en eſt de même pour les autres portions du cercle.

Il eſt encore manifeſte que les centres de peſanteur des ſecteurs ſemblables de différens cercles diviſent en même raiſon les rayons ſur leſquels ils ſont ſituez.

PROPOSITION VII.

PROBLEME.

120. TROUVER *le centre de peſanteur d'un eſpace renfermé par une parabole.*

Les mêmes choſes étant poſées que dans *l'article* 35. on aura $y\,dx = x^{\frac{1}{2}}\,dx$ pour la différentielle des poids, & multipliant cette grandeur par ſon bras $= x$, on aura $x^{\frac{3}{2}}\,dx =$ à la différentielle des momens, dont l'intégrale $= \frac{2}{5}\,x^{\frac{5}{2}}$, laquelle étant diviſée par la ſomme des poids $= \frac{2}{3}\,x^{\frac{3}{2}}$, on aura $\frac{3}{5}\,x$ pour la diſtance de l'axe de balancement paſſant par le point A, au centre de peſanteur de l'eſpace MAM, & $\frac{3}{5}\,a$ pour BAB, parce qu'en D, x devient $= a$. FIG. 12.

PROPOSITION VIII.

PROBLEME.

121. TROUVER *généralement le centre de peſanteur d'un eſpace renfermé par une parabole, dont la nature eſt exprimée par cette équation*, $y^m = 1x$.

On aura $\frac{x}{1}\,x^m\,dx =$ à la différentielle des poids, & * *Art.* 38.

*Art. 109. $x^{\frac{1}{m}+1} dx$ = à celle des momens *, dont l'intégrale $= \frac{m}{1m+1} x^{\frac{1}{m}+1}$, laquelle étant diviſée par la ſomme des poids $= \frac{m+1}{m} x^{\frac{1}{m}+1}$, donnera $\frac{m+1}{1m+1} x$ pour la diſtance du centre de peſanteur à l'axe de balancement TT paſſant par le ſommet A, de l'eſpace indéterminé MAM, & $\frac{m+1}{1m+1} a$ pour celle de l'eſpace entier que l'on cherchoit. Ainſi la ligne AD doit être diviſée en telle ſorte que la partie qui eſt du côté de la baſe ſoit à l'autre, comme 1 eſt à $\frac{1}{m}+1$, ou comme m eſt à $m+1$. Car $a. \frac{m+1}{1m+1} a :: 2m+1. m+1$; & $a \frac{m+1}{1m+1} a. \frac{m+1}{1m+1} a :: m. m+1 :: 1. \frac{m+1}{m} :: 1. 1+\frac{1}{m}$; donc &c.

Si $m=2$, comme dans la parabole ordinaire, on aura $\frac{2}{3} a$ pour la diſtance de l'axe d'équilibre au centre de peſanteur de l'eſpace BAB.

Si $m=3$, comme dans une des paraboles cubiques, on aura $\frac{3}{7} a$. Si $m=4$, cette diſtance ſera $=\frac{4}{9} a$.

FIG. 30. Mais ſi $m=\frac{1}{2}$, alors l'axe de la parabole devient la tangente au ſommet, on aura $\frac{1}{4} a$ pour le bras de l'eſpace concave ABT ſur l'axe d'équilibre AD. Si $m=\frac{1}{3}$, on aura $\frac{3}{5} a$, & ſi $m=\frac{1}{4}$, la diſtance cherchée ſera $=\frac{4}{6} a$. Il en eſt ainſi des autres.

Si les ordonnées ne ſont pas perpendiculaires à l'axe, qui eſt en ce cas un diametre, alors cette ligne n'eſt pas le bras de la figure : mais comme la ligne qui paſſe par le centre de peſanteur eſt parallele aux lignes du ſommet & de la baſe, c'eſt-à-dire à l'axe d'équilibre & à la baſe qu'on ſuppoſe paralleles, il eſt évident qu'elles coupent toutes celles qui ſont compriſes entre ces deux-là en même raiſon, & ainſi le diametre eſt toûjours coupé en même proportion que la perpendiculaire ſur la baſe, par conſéquent il n'y a aucune difficulté à trouver le centre de peſanteur de ces figures.

PROP. IX.

PROPOSITION IX.

PROBLEME.

122. TROUVER *le centre de peſanteur d'un eſpace renfermé par une demi parabole.*

Les mêmes choſes étant poſées on déterminera 1°. le bras de cet eſpace ſur AT que l'on a trouvé par le problême précédent $= \frac{m+1}{2m+1}a$. 2°. on cherchera ſon bras ſur l'axe AD en cette ſorte. FIG. 1

On aura pour la différentielle des poids $y\,dx$: mais parce que le centre de peſanteur de toutes les paralleles qui rempliſſent cet eſpace, les diviſe par le milieu, on peut exprimer le bras indéterminé de cette figure par $\frac{1}{2}y$, ainſi la différentielle des momens ſera $\frac{yy\,dx}{2} = \frac{x^{\frac{2}{m}}\,dx}{2}$ à cauſe de la parabole; dont l'intégrale $= \frac{m}{2m+4}x^{\frac{2}{m}+1}$, laquelle étant diviſée par la ſomme des poids $= \frac{m}{m+1}x^{\frac{1}{m}+1}$, donne $\frac{m+1}{2m+4}x^{\frac{1}{m}} = \frac{m+1}{2m+4}y$ pour le bras indéterminé de la figure APM ſur AD, & $\frac{m+1}{2m+4}r$ pour celui de la figure entiere ABD, en nommant la plus grande des ordonnées r. Menant donc par l'extremité de ces deux bras des lignes qui leurs ſoient paralleles, le point où elles s'entre-coupent eſt le centre de peſanteur de cet eſpace.

Si $m = 2$ comme dans la parabole ordinaire, on aura $\frac{3}{5}a$ pour le bras ſur AT, & $\frac{3}{8}r$ pour le bras ſur AD.

Si $m = 3$ comme dans une des paraboles cubiques, le bras ſur AT ſera $\frac{4}{7}a$, & ſur AD $\frac{3}{7}r$.

Si $m = 4$ comme dans la parabole quarrée-quarrée, le bras ſur AT ſera $\frac{5}{9}a$, & ſur AD $\frac{5}{12}r$.

Si $m = 5$ comme dans la parabole ſur-ſolide, le bras ſur AT ſera $\frac{6}{11}a$, & ſur $AD\ \frac{3}{7}r$.

Si $m = \frac{1}{2}$ comme dans le complement de la parabole ſimple, on aura $\frac{3}{4}a$ pour le bras ſur AD, & $\frac{3}{10}r$ ſur AT.

Si $m = \frac{1}{3}$ comme dans le complement de la parabole cubique, le bras ſur AD ſera $\frac{4}{7}a$, & ſur AT, $\frac{2}{7}r$.

Si $m = \frac{1}{4}$ comme dans le complement de la parabole du 4e degré, le bras ſur AD ſera $\frac{5}{6}a$, & ſur AT, $\frac{5}{18}r$.

Si $m = \frac{1}{5}$ comme dans le complement de la parabole ſur-ſolide le bras ſur AD ſera $\frac{6}{7}a$, & ſur $AT\ \frac{3}{11}r$; &c.

PROPOSITION X.

PROBLEME.

123. TROUVER *le centre de peſanteur d'un eſpace renfermé par une hyperbole & par ſes aſymptotes.*

FIG. 13. Les mêmes choſes étant poſées que dans l'*art.* 37. on aura $x^{-1}dx$ = à la différentielle des poids, & multipliant par $x = CP$ qui eſt le bras indéterminé de la figure par rapport à l'axe d'équilibre CE, on aura $x^{-1+1}dx$ = à la différentielle des momens, dont l'intégrale = $\frac{x}{1}$, laquelle étant diviſée par la ſomme des poids = $\frac{xy}{o}$ qui eſt infinie, donne pour ſon bras ſur CE une valeur infiniment petite. Quelques auteurs ajoûtent *ou nulle*, & par conſéquent cet eſpace n'a point de centre de peſanteur; ce qui ne paroît pas vrai, parce que cet infiniment petit eſt un dx qui a quelque valeur. En effet l'aſymptote étant infinie, ſon poids peut contrepezer le fini.

PROPOSITION XI.

PROBLEME.

124. TROUVER *généralement le centre de peſanteur de ces eſpaces, de quelque degré que ſoit l'hyperbole.*

Soit $y^m = x$ qui exprime la nature de toutes les hyperboles à l'infini par rapport à leurs asymptotes, m marquant un nombre négatif entier ou rompu. On aura pour la différentielle des poids * $x^{\frac{1}{m}} dx$, & pour celle des momens $x^{\frac{1}{m}+1} dx$, dont l'intégrale $= \frac{m}{2m+1} x^{\frac{1}{m}+2}$, laquelle étant divisée par la somme des poids $= \frac{m}{m+1} x^{\frac{1}{m}+1}$, donne $\frac{m+1}{2m+1} x$ pour la distance du centre de pesanteur de l'espace indéterminé de l'hyperbole, à l'axe d'équilibre passant par le point C parallele à la base BA, & $\frac{m+1}{2m+1} a$ pour celle de l'espace entier : D'où l'on peut tirer la même conclusion que dans la parabole *art.* 121.

* *Art.* 38.

Si $m = -1$ comme dans l'hyperbole ordinaire, on trouvera de même que dans l'article précedent pour le bras sur CE une valeur infiniment petite.

Si $m = -2$ comme dans une des hyperboles cubiques, on trouvera $\frac{1}{3} a$ pour la distance cherchée, &c.

PROPOSITION XII.

PROBLEME.

125. TROUVER *le centre de pesanteur de la moitié de ces espaces hyperboliques* ECBAMF.

Les mêmes choses étant posées ; on déterminera 1°. le bras sur CE que l'on vient de trouver par le problême précédent $\frac{m+1}{2m+1} a$. 2°. on cherchera le bras sur CB en cette sorte. On aura pour la différentielle des poids, $y\,dx$; mais parce que le centre de pesanteur de toutes les paralleles PM qui rempliſſent cet espace, les divise par le milieu, leur bras sera $\frac{1}{2} y$, & ainsi la différentielle des momens sera $\frac{y y\,dx}{2} = \frac{x^{\frac{2}{m}} dx}{2}$ à cause de l'hyperbole, dont l'inté-

FIG. 11.

grale $= \frac{m}{2m+4} x^{\frac{1}{m}+1}$ laquelle étant divisée par la somme des poids $= \frac{m}{m+1} x^{\frac{1}{m}+1}$, donne $\frac{m+1}{2m+4} x^{\frac{1}{m}} = \frac{m+1}{2m+4} y$ pour le bras sur CB de l'espace indéterminé $ECPMF$, & $\frac{m+1}{2m+4} b$ pour celui de l'espace entier en supposant $AB = b$. Menant donc par l'extrémité de ces bras, des lignes qui leur soient paralleles, le point d'intersection sera le centre de pesanteur cherché.

Si $m = -3$, on trouvera pour le bras sur CE, $\frac{3}{5} a$; & sur CB, b.

Si $m = -4$, le bras sur CE sera $\frac{3}{2} a$, & sur CB, $\frac{3}{4} b$; il en est ainsi des autres.

PROPOSITION XIII.

PROBLEME.

126. TROUVER *le centre de pesanteur de l'espace compris entre la courbe* AMB *& la droite* AB.

Fig. 22.

Les mêmes choses étant posées que dans l'*art.* 51. on déterminera 1°. le bras de cet espace par rapport à l'axe d'equilibre AE en cette sorte. La différentielle des poids $= \frac{a - x \times x^{\frac{m}{n}} dx}{a^{\frac{m}{n}}}$, & multipliant par x (AP) on aura pour celle des momens $\frac{a - x \times x^{\frac{m}{n}+1} dx}{a^{\frac{m}{n}}}$, dont l'intégrale $= \frac{n a x^{\frac{m}{n}+2}}{m+2na^{\frac{m}{n}}} - \frac{n x^{\frac{m}{n}+3}}{m+3na^{\frac{m}{n}}} + \frac{mn+3mn}{mm+5mn+6nn} \frac{x^{\frac{m}{n}+2}}{a^{\frac{m}{n}}} - \frac{mn+2nn}{mm+5mn+6nn} \frac{x^{\frac{m}{n}+3}}{a^{\frac{m}{n}}}$, laquelle étant divisée par la somme des poids $= \frac{n a x^{\frac{m}{n}+1}}{m+na^{\frac{m}{n}}} - \frac{n x^{\frac{m}{n}+2}}{m+2na^{\frac{m}{n}}} =$

$\frac{mn+2nna\,x^{\frac{m}{n}+1}-mn-nnx^{\frac{m}{n}+2}}{mm+3mn+2nn\,a^{\frac{m}{n}}}$, donnera

$$\frac{m^3+6mmn+11mnn+6n^3a\,x-m^3-5mmn-8mnn-4n^3xx}{m^3+7mmn+16mnn+12n^3a-m^3-6mmn-11mnn-6n^3x} = \frac{m+n}{m+3n}\times\frac{m+3nxa-m-2nxx}{m+3nxa-m-nxx}$$

pour le bras de l'espace indéterminé APM sur AE, & $\frac{mm+3mn+2nn}{mm+5mn+6nn}\,a = \frac{m+n}{m+3n}\,a$ pour celui de l'espace entier, parce que P en B, x devient $= a$.

2°. On déterminera le bras de cet espace sur l'axe AB, ce qui se fait ainsi.

Le centre de pesanteur de toutes les ordonnées PM qui rempliſſent l'espace, les diviſant par le milieu, leur bras commun se peut exprimer par $\frac{1}{2}y$; ainsi la différentielle des momens sera $\frac{yydx}{2} = \frac{aax^{\frac{2m}{n}}dx-2ax^{\frac{2m}{n}+1}dx+x^{\frac{2m}{n}+2}dx}{2a^{\frac{2m}{n}}}$

à cause de la courbe dont l'intégrale $= \frac{naax^{\frac{2m}{n}+1}}{4m+2na^{\frac{2m}{n}}} -$

$$\frac{2nax^{\frac{2m}{n}+2}}{2m+2na^{\frac{2m}{n}}}+\frac{nnx^{\frac{2m}{n}+3}}{4m+6na^{\frac{2m}{n}}} = \frac{2mmn+5mnn+3n^3\,aax^{\frac{2m}{n}+1}}{8m^3+24mmn+22mnn+6n^3\,a^{\frac{2m}{n}}} - \frac{4mmn-8mnn-3n^3\,ax^{\frac{2m}{n}+2}}{8m^3+24mmn+22mnn+6n^3\,a^{\frac{2m}{n}}} + \frac{+2mmn+3mnn+n^3x^{\frac{2m}{n}+3}}{8m^3+24mmn+22mnn+6n^3\,a^{\frac{2m}{n}}}$$

laquelle grandeur étant diviſée par la somme des poids $= \frac{mn+2nnax^{\frac{m}{n}+1}-mn-nnx^{\frac{m}{n}+2}}{mm+3mn+2nn\,a^{\frac{m}{n}}}$ donnera la valeur du bras de l'espace indéterminé APM par rapport à l'axe d'équilibre AB, d'où l'on tirera pour celle du bras de l'eſ-

pace entier $AMBA$ $\frac{mmn+3mnn+2n^3}{6m^3+24mmn+22mnn+6n^3}a$ $=\frac{m+2n\times an^2}{8m^2+16mn+6n^2}$ à cauſe du diviſeur connu $m+n$ de la premiere fraction, parce qu'alors x devient $=a$. Menant donc par l'extremité de ces bras des lignes qui leur ſoient paralleles, le point d'interſection ſera le centre de peſanteur que l'on demande.

Si $m=2$, $n=1$; on aura $\frac{3}{7}a$ pour le bras ſur AE, & $\frac{2}{35}a$ pour le bras ſur AB.

On pourroit trouver avec la même facilité le centre de peſanteur des deux autres eſpaces renfermez par les courbes AND, & AQB.

PROPOSITION XIV.

PROBLEME.

127. TROUVER *le centre de peſanteur d'un priſme.*

Il eſt évident que le centre de peſanteur de ce Solide ſe trouve au milieu de la ligne qui paſſe par le centre de peſanteur des baſes, puiſqu'il eſt compoſé d'une infinité de plans paralleles & égaux à ſes baſes. Il en eſt de même du cylindre; mais on ne laiſſera pas cependant que de le chercher par la regle.

PROPOSITION XV.

PROBLEME.

128. TROUVER *le centre de peſanteur d'un cylindre.*

FIG. 8. On voit d'abord que ce centre doit ſe trouver ſur l'axe EF. Soit donc cet axe $=a$, ſa partie $EP=x$, & $\frac{cr}{2}$ un des cercles dont le cylindre eſt compoſé, on aura $\frac{crdx}{2}$ pour la différentielle des poids, & $\frac{crxdx}{2}$ pour celle des momens par rapport à l'axe d'équilibre AD, dont l'inté-

grale $= \frac{crxx}{4}$, laquelle étant diviſée par la ſomme des poids $= \frac{crx}{2}$, donne $\frac{x}{2}$ pour le bras de la portion qui a pour hauteur EP, & $\frac{a}{2}$ pour celui du cylindre entier parce qu'en F, x devient $= a$.

PROPOSITION XVI.

PROBLEME.

129. TROUVER *le centre de peſanteur d'une pyramide.*

Les mêmes choſes étant poſées que dans l'*art.* 59. on aura $\frac{bcxxdx}{2aa}$ pour la différentielle des poids, & $\frac{bcx^3dx}{2aa}$ pour celle des momens par rapport à un axe d'équilibre paſſant par A parallelement à BD, dont l'intégrale $= \frac{bcx^4}{8aa}$, laquelle étant diviſée par la ſomme des poids $= \frac{bcx^3}{6aa}$, donne $\frac{3}{4}x$ pour la diſtance du centre de peſanteur de la partie de la pyramide qui a pour hauteur AP, à l'axe de balancement qui paſſe par le ſommet A, d'où l'on tire $\frac{3}{4}a$ pour celle de la pyramide entiere, parce qu'en B, x devient $= a$. FIG. 7.

On fera les mêmes raiſonnemens pour le cone, puiſque ce n'eſt qu'une pyramide d'une infinité de côtez.

PROPOSITION XVII.

PROBLEME.

130. TROUVER *le centre de peſanteur d'un ſphere par rapport à ſon axe d'équilibre* AK *paſſant par* A *parallelement à* BC.

Il eſt évident que ce centre doit ſe trouver ſur le diametre AD perpendiculaire à l'axe de balancement AK, & qu'il n'eſt pas différent de celui de la ſphere ; mais on FIG. 10.

ne laiſſera pas cependant que d'y appliquer la méthode, à cauſe des parties auſquelles elle s'étend.

Les mêmes choſes étant poſées que dans l'*art.* 66. on aura pour la différentielle des poids $cxdx - \frac{cxxdx}{2r}$, & pour celle des momens $cxxdx - \frac{cx^3dx}{2r}$, dont l'intégrale $= \frac{cx^3}{3} - \frac{cx^4}{8r}$, laquelle étant diviſée par $\frac{cxx}{2} - \frac{cx^3}{6r} =$ à la ſomme des poids, donne $\frac{8crx^3 - 3cx^4}{12crxx - 4cx^3} = \frac{8rx - 3xx}{12r - 4x}$ pour la diſtance de l'axe de balancement AK au centre de peſanteur de la partie indéterminée de la ſphere décrite par la révolution de la portion AMP autour de AC, laquelle devient $= r$ pour la ſphére entiére, parce qu'en D, x devient $= 2r$; d'où l'on voit que le centre de peſanteur eſt le même que celui de la ſphere.

Si l'on vouloit avoir le centre de peſanteur de la moitié de la ſphére, on trouveroit comme auparavant $\frac{8rx - 3xx}{12r - 4x}$, ce qui donneroit $\frac{5}{8}r$ pour la diſtance cherchée ſur un axe de balancement tel que AK, parce qu'en ce cas x devient $= r$.

De là il eſt facile d'avoir le centre de peſanteur d'un ſegment de ſphere, & d'une de ſes portions quelconque coupée par deux plans paralleles.

PROPOSITION XVIII.

PROBLEME.

131. TROUVER *le centre de peſanteur du Solide formé par la révolution de la parabole* AMB *autour de ſon axe* AD. FIG. 30.

Les mêmes choſes étant poſées que dans l'*art.* 77. on aura pour la différentielle des poids $\frac{cxdx}{2r}$, & pour celle des momens autour de l'axe d'équilibre AT, $\frac{cxxdx}{2r}$, dont l'intégrale $= \frac{cr^3}{8r}$, laquelle étant diviſée par la ſomme des poids

poids $= \frac{cxx}{4r}$, donne $\frac{2}{3}x$ pour la distance cherchée de l'axe d'équilibre AT au centre de pesanteur du Solide formé par la révolution de AMP autour de AD; & $\frac{2}{3}a$ pour celle du Solide entier, parce qu'en D, $x = a$.

PROPOSITION XIX.

PROBLEME.

132. TROUVER *généralement le centre de pesanteur de ces Solides, de quelque degré que soit la parabole.*

On aura * $\frac{cyydx}{2r}$ pour la différentielle des poids = * *Art.* 77. $\frac{cx^{\frac{2}{m}}dx}{2r}$ parce que $yy = x^{\frac{2}{m}}$, & $\frac{cx^{\frac{2}{m}+1}dx}{2r}$ pour celle des momens, dont l'intégrale $= \frac{mcx^{\frac{2}{m}+2}}{4m+4r}$, laquelle étant divisée par la somme des poids $= \frac{mcx^{\frac{2}{m}+2}}{2m+4r}$, il viendra $\frac{m+2}{2m+2}x$ pour la distance cherchée dans le Solide partial, & $\frac{m+2}{2m+2}a$ dans le total, parce qu'alors $x = a$.

Si $m = 2$, on aura comme dans la parabole ordinaire $\frac{2}{3}a$ si $m = 3$, on aura $\frac{5}{8}a$, &c.

PROPOSITION XX.

PROBLEME.

*133. TROUVER *le centre de pesanteur du Solide formé par la révolution de l'espace parabolique* A M B D *autour de* B T *parallele à l'axe* A D. FIG. 30.

Les mêmes choses étant posées que dans l'*article* 80. on aura pour la différentielle des poids $\frac{2cr x^{\frac{1}{2}}dx - cxdx}{2r}$, & multipliant cette grandeur par x bras du levier par rap-

port à l'axe de balancement passant par AT, il viendra $\frac{2crx^{\frac{1}{2}+1}dx - cxxdx}{2r}$ = à la différentielle des momens ; dont l'intégrale $= \frac{2crx^{\frac{1}{2}+2}}{5r} - \frac{cx^3}{6r} = \frac{12crx^{\frac{1}{2}+2} - 5cx^3}{30r}$; laquelle étant divisée par la somme des poids $= \frac{8crx^{\frac{1}{2}+1} - 3cxx}{12r}$, donne pour quotient $\frac{24rx^{\frac{1}{2}+1} - 10xx}{40rx^{\frac{1}{2}} - 15x}$ $= \frac{24rx - 10yx}{40r - 15y}$ qui est la distance du plan d'équilibre passant par AT au centre de pesanteur de la portion de Solide décrite par APM, d'où l'on tire $\frac{14}{25}a$ pour celle du Solide entier, parceque x devenant a, y devient r.

PROPOSITION XXI.

PROBLEME.

FIG. 31. 134. TROUVER *le centre de pesanteur du Solide formé par la révolution du même espace autour de la tangente au sommet* AT.

Les mêmes choses étant posées que dans l'*article* 82. on aura $\frac{cy^{\frac{3}{2}}dy}{r}$ pour la différentielle des poids, & multipliant par $\frac{x}{y}$ ou par sa valeur $\frac{y^{\frac{1}{2}}}{a}$, on aura $\frac{cyydy}{ar}$ = à la différentielle des momens autour de l'axe d'équilibre AD, dont l'intégrale $= \frac{cy^3}{6r}$, laquelle étant divisée par la somme des poids $= \frac{2cy^{\frac{1}{2}}}{5r}$, donne $\frac{5}{12}y^{\frac{1}{2}} = \frac{5}{12}x$ pour la distance du point A au centre de pesanteur de la portion de Solide formée par AMQ, ce qui donne $\frac{5}{12}a$ pour celle du Solide entier, parce qu'en T, x devient $= a$.

PROPOSITION XXII.

PROBLEME.

135. TROUVER *le centre de pesanteur du Solide formé par la révolution de la parabole autour de sa base* B D. FIG. 30

Les mêmes choses étant posées que dans *l'article* 84. on aura pour la différentielle des poids $\frac{2cryydy - 2cy^4dy}{r}$ Et parce que le centre de pesanteur de toutes les superficies cylindriques décrites par les $P\,M$ les divise par le milieu, on peut exprimer leur bras commun par rapport à l'axe d'équilibre $A\,D$, par $\frac{1}{2}y$, on aura donc pour la différentielle des momens, $\frac{cry^3dy - cy^5dy}{r}$, dont l'intégrale $= \frac{cry^4}{4r} - \frac{cy^6}{6r} = \frac{12cry^4 - 2cy^6}{12r}$, laquelle étant divisé par la somme des poids $= \frac{10cry^3 - 6cy^5}{15r}$, donne pour le bras de la portion indéterminée du Solide sur $A\,D$, $\frac{15ry - 10y^3}{40r - 24yy}$, d'où l'on tire pour celui du Solide entier $\frac{5}{16}a$, parce que x devient $= r$, & $y = a$.

Si tous ces Solides n'étoient formez que par la révolution imparfaite de la parabole, il seroit facile d'avoir aussi leur centre de pesanteur. On en va donner un exemple dans le problême suivant.

PROPOSITION XXIII.

PROBLEME.

136. TROUVER *le centre de pesanteur d'une portion quelconque de Solide parabolique coupé par un ou plusieurs plans passans par l'axe* A D *autour duquel il a été formé.* FIG. 31

Il est manifeste que ces Solides seront composez de secteurs qui sont en même raison que les cercles qui composent le Solide entier; ainsi leur bras commun par rapport

à la tangente au sommet AT que l'on regarde comme l'axe d'équilibre, sera le même que celui du solide entier que l'on a trouvé * $\frac{m+2}{2m+2}a$. Car l'on voit évidemment que le centre de pesanteur de ces Solides doit se trouver dans le plan qui passant par l'axe AD divise le secteur de la base en deux parties égales, puisque ce plan coupera aussi par la moitié tous les secteurs qui forment le Solide. Il ne reste donc qu'à déterminer leur bras sur l'axe AD. Ce qui se fait ainsi.

* *Art.* 132.

Nommant l'arc du Secteur de la base, c; son rayon, r; on aura * $\frac{cyydx}{2r}$ pour la différentielle des poids. Mais on a démontré * que le centre de pesanteur d'un secteur de cercle est tellement situé sur le rayon qui le divise par le milieu, que sa distance du centre du cercle est aux deux tiers du rayon, comme la corde est à l'arc, on peut donc exprimer leur bras commun par $\frac{2ay}{3c}$, en nommant la corde, a; & ainsi on aura pour la différentielle des momens $\frac{ay^3dx}{3r} = \frac{ax^{\frac{3}{m}}dx}{3r}$ à cause de la parabole, dont l'intégrale $= \frac{max^{\frac{3}{m}+1}}{3m+9r}$, laquelle étant divisée par la somme des poids $= \frac{mcx^{\frac{2}{m}+1}}{2m+4r}$, donnera $\frac{2m+4ax^{\frac{1}{m}}}{3m+9c} = \frac{2m+4ay}{3m+9c}$ pour le bras sur AD de la portion indéterminée du Solide formée par l'espace AMP, & pour celui du Solide entier $\frac{2m+4ar}{3m+9c}$, parce qu'alors y devient $= r$. Menant donc par l'extremité de ces bras des plans qui leur soient perpendiculaires, le point d'intersection de ces trois plans sera le centre de pesanteur du solide.

* *Art.* 79.

* *Art.* 128.

Si $m = 2$ comme dans la parabole ordinaire; on aura $\frac{3}{5}a$ pour le bras sur AT, & $\frac{8r}{15c}$ pour le bras sur AD.

Si $m = 3$ comme dans une des paraboles cubiques, le bras sur AT sera $\frac{1}{8}a$, & sur AD $\frac{15r}{96}$.

Si $m = \frac{1}{2}$ comme dans l'autre parabole cubique, on aura sur AT, $\frac{7}{10}a$, & sur AD, $\frac{14r}{27c}$ &c.

On trouvera avec la même facilité le centre de pesanteur des portions des autres Solides, soit qu'on les considere composés de secteurs de cercles, soit qu'on les regarde composés de portions de surfaces cylindriques, de sorte que l'on ne s'y arrêtera pas.

PROPOSITION XXIV.

PROBLEME.

137. TROUVER *le centre de pesanteur du Solide formé par la révolution de la parabole autour d'un de ses diametres, c'est-à-dire lorsque les ordonées ne font pas un angle droit avec ce diametre.* FIG. 32.

Les mêmes choses étant posées que dans l'*article* 86. on aura $\frac{crx}{2b}$ = à la surface conique décrite par MP, & menant sur le diametre AD prolongé les perpendiculaires BK, MI, il est clair que DK & PI seront les axes des cones droits décrits dans le mouvement de la figure par les triangles rectangles BKD, MIP. Mais on a démontré * que les centres de pesanteur des surfaces coniques se trouvent aux deux tiers de leur axe; nommant donc DK, a; on aura à cause des triangles semblables & à cause de la parabole, $PI = a\sqrt{\frac{x}{b}}$, donc $\frac{2}{3}a\sqrt{\frac{x}{b}}$ est la distance du centre de pesanteur de la surface conique décrite par PM, du point P, & $\frac{2}{3}a\sqrt{\frac{x}{b}} + x$ pour celle du sommet A. Multipliant donc $\frac{acrxdx}{2bb}$, par $\frac{2}{3}a\sqrt{\frac{x}{b}} + x$, on aura $\frac{\frac{2}{3}acrx^{\frac{3}{2}}dx}{\frac{3}{2}+1} + \frac{acrxxdx}{2bb} =$

* *Art.* 114.

à la différentielle des momens, dont l'intégrale = $\frac{2acrx^{\frac{5}{2}}}{15b^{\frac{3}{2}}+2} + \frac{acrx^3}{6bb}$, laquelle étant divisée par la somme des poids $= \frac{acrxx}{4bb}$, donnera $\frac{8}{15}a\sqrt{\frac{x}{b}} + \frac{2}{3}x$ pour la distance du sommet A au centre de pesanteur de la partie du Solide formée par AMP, & $\frac{8}{15}a + \frac{2}{3}b$ pour celle du Solide entier, parce qu'alors x devient $= b$.

PROPOSITION XXV.

PROBLEME.

FIG. 321. 138. TROUVER *le centre de pesanteur du Solide formé par la révolution du même espace autour de* AT *tangente au sommet.*

Les mêmes choses étant posées que dans l'*art.* 88. on aura $\frac{cxy}{b} = \frac{cy\sqrt{x^3}}{bb}$ valeur de la surface cylindrique décrite par PM. Mais le centre de pesanteur des surfaces cylindriques divise leur axe par le milieu: nommant donc DH, e; on aura $PQ = \frac{ey}{b}$, & $\frac{x}{2} + \frac{ey}{b}$ sera le bras de la surface cylindrique par rapport à l'axe d'équilibre AH: ainsi multipliant la différentielle des poids $= \frac{cry^{\frac{3}{2}}dy}{bb}$ par $\frac{x}{2} + \frac{ey}{b}$, & mettant pour x sa valeur $y^{\frac{2}{3}}$, on aura pour celle des momens $\frac{cryydy}{2bb} + \frac{cery^{\frac{3}{2}+2}dy}{b^3}$, dont l'intégrale $= \frac{cry^4}{6bb} + \frac{2cery^{\frac{3}{2}+2}}{7b^3}$, laquelle étant divisée par la somme des poids $= \frac{2cry^{\frac{3}{2}+1}}{5bb}$, donne $\frac{5}{14}y^{\frac{2}{3}} + \frac{5ey}{7b}$ pour le bras de la portion de Solide décrite par la révolution de l'espace $AP M$, &

$\frac{5}{12}a + \frac{1}{7}e$ pour celui du Solide entier, parce qu'alors x devient $= a$, & $y = b$.

PROPOSITION XXVI.

PROBLEME.

139. TROUVER *le centre de pesanteur du Solide formé par la révolution de l'hyperbole autour d'une de ses asymptotes* CE. FIG.

Les mêmes choses étant posées que dans l'*art.* 90. on aura pour la différentielle des poids $acdx$. Et parce que le centre de pesanteur des surfaces cylindriques qui composent le Solide, les divise par le milieu, on peut exprimer leur bras commun par $\frac{1}{2}y$; & ainsi la différentielle des momens sera $= \frac{acydx}{2}$; mais $y = \frac{ar}{x}$, mettant donc cette valeur dans $acydx$, il viendra $\frac{aacrdx}{2x} = \frac{aacrx^{-1}dx}{2}$ dont l'intégrale $= \frac{aacr}{20}$, laquelle étant divisée par la somme des poids $= acx$, donnera $\frac{ar}{2x0}$ pour la distance de l'axe d'équilibre CB au centre de pesanteur de la portion indéterminée du Solide, & $\frac{a}{20}$ pour celle du Solide entier, parce que x devient r. Ce qui fait connoître que ce Solide n'a point de centre de pesanteur, puisqu'on trouve pour la valeur de son bras une grandeur infinie.

PROPOSITION XXVII.

PROBLEME.

140. TROUVER *généralement le centre de pesanteur de ce Solide, de quelque dégré que soit l'hyperbole.*

On aura $\frac{x}{2}\frac{cx^{\frac{1}{m}+r}dx}{g} =$ à la différentielle des poids, & *Art. 93.

multipliant par $\frac{y}{z}$ ou par sa valeur $\frac{x}{z}^{\frac{1}{m}}$, on aura $\frac{c x^{\frac{2}{m}+1} dx}{2r}$ = à celle des momens, dont l'intégrale = $\frac{mcx^{\frac{2}{m}+2}}{4m+4r}$, laquelle étant divisée par $\frac{mcxxy}{2m+2r}$ = à la somme des poids, donnera $\frac{2m+1}{4m+4}y$ pour la distance de CB au centre de pesanteur du Solide formé par la révolution de $ECPMF$ autour de CE, ce qui donnera $\frac{2m+1}{4m+4}a$ (M. Parent dit que $ax\frac{1-2m}{4-4m}$ est une expression plus usitée) pour celle du Solide entier, parce qu'alors y se trouve $= a$: ce qu'il falloit &c.

PROPOSITION XXVIII,

PROBLEME.

141. TROUVER *le centre de pesanteur du Solide formé par la révolution de la même hyperbole autour de l'autre asymptote* CB

FIG. 13.

Les mêmes choses étant posées que dans l'*art.* 92. on aura pour la différentielle des poids $\frac{aacrx^{-2}dx}{2}$ & multipliant par le bras $= x$, on aura pour celle des momens par rapport à CE que l'on regarde comme l'axe de balancement $\frac{aacrx^{-1}dx}{2}$, dont l'intégrale $= \frac{aacr}{20}$, laquelle étant divisée par la somme des poids, donnera encore une valeur infinie (le même reprend ceci en disant que cette valeur est celle de la distance à laquelle il faut considérer cette figure suspendue de l'autre côté de l'appui C sur le levier CB, il n'en dit pas d'avantage) & par conséquent ce Solide n'a point de centre de pesanteur.

PROP. XXIX,

PROPOSITION XXIX.

PROBLEME.

142. TROUVER *généralement le centre de pesanteur de ce Solide formé autour de* CB. FIG. 13.

On aura * $\frac{mcy^{m+1}dy}{2r}$ = à la différentielle des poids, & multipliant par x ou par sa valeur y^m, on aura $\frac{mcy^{2m+1}dy}{2r}$ = à celle des momens, dont l'intégrale = $\frac{mcy^{2m+2}}{4m+4r} = \frac{mcvvxx}{4m+4r}$, laquelle étant divisée par la somme des poids = $\frac{mcxyy}{2m+4r}$, donnera (le même dit qu'au lieu de $\frac{m+1}{2m+2}x$, il aimeroit mieux $\frac{2-m}{2-2m}x$ à cause qu'il s'agit d'hyperboles où m est négatif) $\frac{m+2}{2m+2}x$ pour la distance de CE au centre de pesanteur du Solide formé par la révolution de l'espace $ECPMF$ autour de CB, & $\frac{m+2}{2m+2}a$ pour celle du Solide entier, parce qu'alors x devient $=a$. * Art. 91.

Si l'on vouloit donner à l'exposant m le signe négatif qu'on lui suppose, la formule deviendroit $\frac{2-m}{2-2m}a$, & il seroit facile de voir quels seroient les Solides qui auroient un centre de pesanteur, & quels seroient ceux qui n'en auroient pas, en supposant m égale, moindre ou plus grande que quelque nombre positif que l'on voudroit.

PROPOSITION XXX.

PROBLEME.

143. TROUVER *le centre de pesanteur du Solide for-* FIG. 35.

mé par la révolution de l'eſpace hyperbolique A M B D *autour de l'axe* A D.

Les mêmes choſes étant poſées que dans l'*art.* 94. on aura pour la différentielle des poids $\frac{crxxdx+2bcrxdx}{2aa+4ab}$, & pour celle des momens par rapport à l'axe d'équilibre paſſant par le ſommet *A* perpendiculairement ſur *AD* $\frac{crx^3dx+2bcrxxdx}{2aa+4ab}$ dont l'intégrale $= \frac{crx^4}{8aa+16ab} + \frac{bcrx^3}{3aa+6ab} = \frac{3crx^4+8bcrx^3}{24aa+48ab}$, laquelle étant diviſée par $\frac{crx^3+3bcrxx}{6aa+12ab} = \frac{4crx^3+12bcrxx}{24aa+48ab}$ ſomme des poids, donnera $\frac{3xx+8bx}{4x+12b}$ pour la diſtance de l'axe d'équilibre au centre de peſanteur du Solide formé par la révolution de l'eſpace indéterminé *AMP* autour de *AD*, & $\frac{3aa+8ab}{4a+12b}$ pour celle du Solide entier; parce qu'alors x devient $= a$. D'où il eſt évident que le centre de peſanteur de ce conoïde hyperbolique ſe trouve ſur l'axe de telle ſorte que la partie priſe depuis le ſommet juſqu'au centre de peſanteur eſt à l'axe entier comme $3a+8b$ eſt à $4a+12b$.

PROPOSITION XXXI.

PROBLEME.

FIG. 34. 144. TROUVER *le centre de peſanteur du Solide formé par la révolution de l'eſpace hyperbolique* C A M B D *autour du demi-axe conjugué* C D.

Les mêmes choſes étant poſées que dans l'*art.* 96. on aura pour la différentielle des poids $\frac{aacxxdx+aabbcdx}{2bbr}$, & pour celle des momens par rapport à *AC* que l'on regarde comme l'axe de balancement $\frac{acx^3dx+aabbcxdx}{2bbr}$, dont l'intégrale $= \frac{aacx^4}{8bbr} + \frac{aabbcxx}{4bbr}$, & remettant pour aa ſa valeur $\frac{bbyy}{xx+bb}$, il viendra $\frac{cx^4yy+2bbcxxyy}{8rxx+8bbr}$; ce qui étant

divisé par la somme des poids $= \frac{cx^3yy + 3bbcxyy}{6rxx + 6bbr}$, donne $\frac{3x^3 + 6bbx}{4xx + 12bb}$ pour la distance de l'axe d'équilibre AC au centre de pesanteur du Solide formé par l'espace $ACPM$; & $\frac{9}{16}b$ pour celle du Solide entier, parce qu'alors x devient $= b$.

Donc le centre de pesanteur de ce Solide est tellement situé sur l'axe, que la partie depuis le point C jusqu'au centre de pesanteur est à l'axe entier comme 9 est à 16.

PROPOSITION XXXII.

PROBLEME.

145. TROUVER *le centre de pesanteur du Solide formé par la révolution de la demi-ellipse* A B D *autour de l'axe* A D, *par rapport au plan d'équilibre passant par le point* A *perpendiculairement sur* A D. FIG. 35.

On voit d'abord que le centre de pesanteur de ce Solide doit se trouver sur l'axe AD, & mêmes qu'il n'est pas different de celui de la figure; on ne laissera pas cependant que d'y appliquer la méthode.

Les mêmes choses étant posées que dans l'*art.* 98. on aura pour la différentielle des poids $\frac{cyydx}{2r}$. Mais à cause de l'ellipse en nommant $AP, x; yy. 2ax - xx :: rr. aa$. Donc $yy = \frac{2arrx - rrxx}{aa}$, mettant donc pour yy cette valeur dans $\frac{cyydx}{2r}$, on aura $\frac{2acrxdx - crxxdx}{2aa}$, & multipliant par x, la différentielle des momens sera $\frac{2acrxxdx - crx^3dx}{2aa}$ dont l'intégrale $= \frac{crx^3}{3a} - \frac{crx^4}{8aa} = \frac{8acrx^3 - 3crx^4}{24aa}$, laquelle étant divisée par la somme des poids $= \frac{12acrxx - 4crx^3}{24aa}$, donnera $\frac{8ax - 3xx}{12a - 4x}$ pour la distance du plan d'équilibre au centre de pesanteur du Solide décrit par la révolution de AMP autour de AD; & a pour celle du Solide ellipti-

que entier; parce qu'alors x devient $= 2a$. Ce qui fait connoître que ce centre de peſanteur eſt le centre même de la figure.

Si l'on vouloit avoir le centre de peſanteur de la moitié du Solide elliptique, pour lors x deviendroit $= a$, & on trouveroit $\frac{5}{8}a$ pour la diſtance cherchée du plan de balancement paſſant par le point A.

PROPOSITION XXXIII.

PROBLEME.

146. TROUVER *le centre de peſanteur du Solide formé par la révolution de la Courbe* A M B *autour de l'axe* A B. FIG. 21.

Les mêmes choſes étant poſées que dans l'*art.* 105. on aura pour la différentielle des poids $\frac{aacx^4dx - 2acx^5dx + cx^6dx}{2a^4r}s$ & multipliant par x (AP) on aura pour celle des momens par rapport à l'axe de balancement AE $\frac{aacx^5dx - 2acx^6dx + cx^7dx}{2a^4r}$, dont l'intégrale $= \frac{cx^6}{12a^4r} - \frac{cx^7}{7a^3r} + \frac{cx^8}{16a^4r} = \frac{28aacx^6 - 48acx^7 + 21cx^8}{336a^4r}$, laquelle étant diviſée par la ſomme des poids $= \frac{cx^5}{10aar} - \frac{cx^6}{6a^3r} + \frac{cx^7}{14a^4r} = \frac{21aacx^5 - 35acx^6 + 15cx^7}{210a^4r}$, le quotient donnera $\frac{140aax - 240axx + 105x^3}{168aa - 280ax + 120xx}$ pour la diſtance de l'axe de balancement AE au centre de peſanteur du Solide formé par la révolution de l'eſpace AMP autour de AP, & $\frac{5}{8}a$ pour celle du Solide entier, parce qu'en B, x devient $= a$.

Si l'on vouloit avoir d'une maniere infiniment générale le centre de peſanteur de ce Solide, on trouveroit pour la diſtance cherchée $\frac{4m^3 + 12mmn + 11mnn + 3n^3}{4m^3 + 18mmn + 26mnn + 12n^3}a$. (à cauſe du diviſeur commun $2m^2 + 5mn + 3n^2$) $= \frac{2m+n}{2m+4n} \times a$. On n'en a pas mis le calcul, non parce qu'il renferme au-

cune difficulté en lui-même, mais à cauſe de celle qu'on auroit à l'imprimer.

PROPOSITION XXXIV.

PROBLEME GENERALE.

147. *Le centre de peſanteur d'une figure quelconque plane ou Solide étant connu avec celui d'une de ſes parties, trouver le centre de peſanteur du reſte.* FIG. 42.

Soit par exemple le Conoïde parabolique formé par la demi-révolution de la parabole *BAB* autour de l'axe *AD*, connoiſſant ſon centre de peſanteur, & celui de ſa partie *MAM*, on demande le centre de peſanteur de la portion *BMMB*.

Il eſt évident que le centre de peſanteur de deux poids ſe trouve dans la ligne qui joint leurs centres de peſanteur particuliers, & cette ligne eſt tellement diviſée que les diſtances de ce centre ſont réciproquement proportionnelles aux poids. Soit donc *C* le centre de peſanteur de toute la figure, & *E* celui de la partie *MAM*, & ſoit ſuppoſé que le point *F* ſoit le centre cherché. Ayant nommé la diſtance *CE*, *a*; le poids *BMMB*, *m*; le poids *MAM*, *n*; on dira $m.n :: a.\frac{an}{m} = CF$ qui eſt la diſtance du centre de peſanteur qu'il falloit trouver.

On peut trouver par le moyen de ce problême le centre de peſanteur d'une infinité de figures : par exemple, ſi dans une parabole on inſcrit un triangle, & dans un conoïde parabolique un cone, ou une autre figure quelconque dont on connoiſſe le centre de peſanteur, il eſt évident qu'ayant retranché les parties de leur tout, on connoîtra le centre de peſanteur du reſte.

REMARQUE.

La découverte des centres de peſanteur ſert à trouver

d'une maniere également belle & facile la valeur des ſurfaces & la dimenſion des Solides. Car on démontre que ſi une ligne ou une ſurface droite ou courbe ſe meut uniformement au tour d'un axe, la ſurface ou le Solide engendrez par ce mouvement, ſont égaux à un parallelogramme ou à un parallelépipede qui a pour hauteur la circonférence décrite par le centre de peſanteur, & pour baſe une ligne ou un parallélogramme égal à la ligne ou à la ſurface donnée.

SECTION QUATRIÉME.

DES CENTRES DE PERCUSSION, ET D'OSCILLATION.

LE centre de percuſſion d'un corps en mouvement eſt un point dans lequel toutes les forces de ce corps ſont conſidérées comme réünies, enſorte que s'il venoit à rencontrer par ce point un obſtacle oppoſé à ſon mouvement, il le frappât avec le plus grand effort que par quelque autre point que ce ſoit. Il eſt néceſſaire pour cet effet que les parties dont ce corps eſt compoſé changent tellement leur diſpoſition à ſe mouvoir, qu'elles partagent leur quantité de mouvement, non pas comme dans le centre de peſanteur en raiſon des eſpaces parcourus; mais en raiſon compoſée de leurs vîteſſes & des diſtances de ce centre réciproquement proportionnelles à ces vîteſſes; ou ce qui eſt la même choſe, en des quantitez de mouvement égales de part & d'autre de ce point. Le centre de percuſſion eſt donc à l'égard des vîteſſes ce que le centre de peſanteur eſt à l'égard des poids. Ainſi il y a cette différence que l'un eſt le centre des momens ou des efforts, & l'autre eſt le centre des poids. Or on a vû que pour avoir le centre de peſanteur d'un corps, il faut diviſer la ſomme des momens par la ſomme des poids: Ainſi pour avoir le centre de percuſſion, il n'y a qu'à prendre le produit de la ſomme des momens par des lignes droites, égales ou proportionnelles aux eſpaces parcourus, ou à ſuppoſer que toutes les parties du corps en mouvement ſont changées à

l'inſtant du choc en des poids proportionnels à leurs vîteſſes, & diviſer ce produit par la ſomme des momens. Mais pour avoir la ſomme des lignes proportionnelles aux eſpaces parcourus, il faut connoître le rapport des vîteſſes aux eſpaces, leſquelles ſont toûjours en même raiſon que les eſpaces parcourus en même tems.

On peut conſidére que les corps ſe meuvent ou parallélement à eux mêmes, ou à l'entour d'un point fixe ou d'un axe. S'ils ſe meuvent parallélement à eux mêmes; il eſt évident que le centre de percuſſion n'eſt point différent du centre de peſanteur. Car dans celui-ci, on conſidere les poids ſans vîteſſes, & dans celui-là on les conſidére avec les vîteſſes: or ſi on conçoit ce corps diviſé en une infinité de parties égales, leurs vîteſſes reſpectives ſeront auſſi égales, puiſque les eſpaces parcourus dans le même tems ſont égaux. Ainſi les momens ou la ſomme des forces de part & d'autre du centre de peſanteur ſera égale; donc le centre de peſanteur de toutes ces parties eſt le centre d'équilibre de toutes les vîteſſes. Il eſt donc évident que tout corps mû parallelement à lui-même a un point commun pour le centre de percuſſion & le centre de peſanteur.

Mais ſi les corps ſe meuvent autour d'un point fixe, ou autour d'un axe, le centre de percuſſion eſt différent du centre de peſanteur. Car les parties dont le corps eſt compoſé étant inégalement diſtantes du point ou de l'axe de leur balancement, parcourent des eſpaces inégaux en des tems égaux: car toutes ces parties décrivent des arcs qui ſont en même raiſon que les diſtances de leur axe qui ſont inégales; ainſi pour avoir le centre de percuſſion de ces corps, il faut trouver le rapport des vîteſſes avec les eſpaces parcourus.

REGLE GENERALE pour trouver les centres de percuſſion. On multipliera toutes les petites parties dont le corps eſt compoſé, que l'on regardera comme autant de poids, par les quarrez de leurs diſtances du point de ſuſpenſion, & diviſant ce produit par celui qui eſt fait de la ſomme

ſomme de ces mêmes poids par la diſtance de leur centre commun de peſanteur, le quotient donnera le centre de percuſſion que l'on cherche.

Il eſt bon de remarquer 1°. que l'on ſuppoſe que la peſanteur d'un corps comparée à ſon mouvement eſt zero, quoique cela ſoit faux comme il eſt facile de le démontrer. 2°. Que quoique le centre de percuſſion ſe trouve dans le corps même, & que le choc ſe faſſe dans un point de ſa ſuperficie, on ne laiſſe pas de déterminer en quel endroit de cette ſurface le choc ſe fait: car il eſt évident que ce point ſe trouve toûjours dans la direction du centre des forces dans l'inſtant du choc.

PROPOSITION I.

PROBLEME.

148. TROUVER *le centre de percuſſion d'une ligne ſuſpendue par une de ſes extremitez autour de laquelle on conçoit qu'elle ſe meut librement.* FIG. 37.

Soit la ligne AB ſuſpenduë au point A. Si on la conçoit diviſée en une infinité de petites parties égales, il eſt clair qu'elles décriront en tems égal des arcs de cercles concentriques, qui ſeront entr'eux comme les diſtances du point A qui ſont leurs rayons: Mais les vîteſſes avec leſquelles ces arcs ſont parcourus ſont proportionnelles à ces mêmes arcs, donc les vîteſſes ſont entr'elles comme les raïons ou les diſtances du point de ſuſpention. Si donc on nomme la ligne AB, a; une de ſes parties quelconques AP, x; donc $Pp = dx$; on aura $x\,dx$ pour la différentielle des momens, laquelle étant multipliée par x qui répréſente les vîteſſes, donnera $x\,x\,dx$ pour la différentielle des efforts, dont l'intégrale $= \frac{x^3}{3}$, laquelle étant diviſée par la ſomme des momens $= \frac{x\,x}{2}$, donnera $\frac{2}{3}x$ pour la diſtance du centre de percuſſion de la partie AP, & $\frac{2}{3}a$ pour celle de la ligne entiere, parce que x devient

$= a$. C'eſt à dire que ſi on diviſe la ligne enſorte que la toute ſoit à ſa partie priſe du point A juſqu'au centre de percuſſion, comme 3 eſt à 2, on aura ce qu'on cherche.

Il eſt évident que le centre de percuſſion de la ligne droite n'eſt pas différent du centre de peſanteur du triangle; puiſque les momens ou les forces peuvent être exprimées par des droites qui rempliſſent un triangle.

PROPOSITION II.

PROBLEME.

149. TROUVER *le centre de percuſſion d'un parallélogramme qu'on ſuppoſe ſe mouvoir autour d'un de ſes côtez* AB. FIG. 38.

On voit d'abord que ce centre doit ſe trouver ſur la ligne EF qui le diviſe par le milieu. Ayant fait les mêmes raiſonnemens que par rapport à la ligne droite, & nommé AB, b; EP, x; on aura pour la différentielle des momens $bxdx$, & pour celle des efforts $bxxdx$, dont l'intégrale $= \frac{bx^3}{3}$; laquelle étant diviſée par $\frac{bxx}{2}$ ſomme des momens, donnera $\frac{2}{3}x$ pour la diſtance de l'axe de balancement AB au centre de percuſſion de la partie $ABMM$, & $\frac{2}{3}a$ pour celle du parallélogramme entier, qui n'eſt pas différente de celle de la ligne droite.

PROPOSITION III.

PROBLEME.

150. TROUVER *le centre de percuſſion d'un triangle iſoſcele ſuſpendu par ſon ſommet par lequel ſoit imaginée une droite* EF *parallele à ſa baſe autour de laquelle il eſt agité.* FIG. 39.

Les mêmes choſes étant poſées que dans l'*art.* 112. on aura pour la différentielle des momens $\frac{bxxdx}{a}$, & pour

celle des forces $\frac{bx^3dx}{a}$, dont l'intégrale $=\frac{bx^4}{4a}$, laquelle étant divisée par la somme des momens $=\frac{bx^3}{3a}$, donnera $\frac{3}{4}x$, & de-là $\frac{3}{4}a$ pour la distance de l'axe de balancement EF au centre de percussion du triangle, laquelle n'est pas différente de celle du centre de pesanteur de la parabole ordinaire par rapport à sa tangente au sommet: car les forces peuvent être exprimées par des droites qui remplissent le complement d'une telle parabole.

PROPOSITION IV.

PROBLEME.

151. TROUVER *le centre de percussion d'un triangle isoscele agité autour de sa base.* FIG. 70.

Il est clair que les vîtesse seront entr'elles comme les $DP=a-x$, que l'on considére comme le bras de la figure. Multipliant donc $y\,dx=\frac{bx\,dx}{a}$ par $a-x$, on aura $bx\,dx-\frac{bx\,x\,dx}{a}=$ à la différentielle des momens, & $abx\,dx-2bx\,x\,dx+\frac{bx^3dx}{a}=$ à celle des forces, dont l'intégrale $=\frac{abxx}{2}-\frac{2bx^3}{3}+\frac{bx^4}{4a}$ laquelle étant divisée par la somme des poids $=\frac{bxx}{2}-\frac{bx^3}{3a}$, donnera $\frac{6aa+3xx-8ax}{6a-4x}$ pour la distance de l'axe de balancement BC au centre de percussion du trapeze indéterminé $BMMC$, & $\frac{1}{2}a$ pour celle du triangle entier, parce que x devient $=a$. Ainsi ce centre doit se trouver au milieu de la ligne AD. En effet les distances de l'axe ou de la base du triangle sont reciproquement proportionnelles à des droites paralleles à la base, & également distantes du milieu, ainsi les efforts respectifs qui sont en raison composée des raisons des grandeurs & des distances, seront égaux, & par consé-

quent le centre des forces doit se trouver au milieu de la ligne AD.

PROPOSITION V.

PROBLEME.

FIG. 12. 151. TROUVER *le centre de percussion d'un espace parabolique agité autour d'une ligne qui passe par son sommet parallelement à sa base.*

Les mêmes choses étant posées que dans l'*art.* 120. on aura pour la différentielle des momens $x^{\frac{3}{2}}dx$, & pour celle des forces $x^{\frac{5}{2}}dx$, dont l'intégrale $=\frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}}$, laquelle étant divisée par $\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}=$ à la somme des momens, donnera $\frac{5}{7}x$ pour la distance de l'axe de balancement TT passant par le sommet A au centre de percussion de la portion MAM, & $\frac{5}{7}a$ pour celle de l'espace parabolique entier BAB, parce qu'en D, $x=a$.

PROPOSITION VI.

PROBLEME.

153. TROUVER *généralement le centre de percussion d'un espace parabolique.*

Les mêmes choses étant posées que dans l'*art.* 121. on aura pour la differentielle des momens $x^{\frac{1}{m}+1}dx$, & pour celle des forces $x^{\frac{1}{m}+2}dx$, dont l'intégrale $=\frac{m}{3m+1}x^{\frac{1}{m}+3}$, laquelle étant divisée par la somme des momens $=\frac{m}{2m+1}x^{\frac{1}{m}+2}$, donnera $\frac{2m+1}{3m+1}x$ pour la distance de l'axe

de balancement passant par A, au centre de percussion dans MAM, & $\frac{2m+1}{3m+1}a$ dans BAB. Ce qu'il falloit trouver.

Si $m=2$, on aura pour cette distance $\frac{1}{7}a$ comme dans la parabole ordinaire; Si $m=3$, on aura $\frac{7}{10}a$, comme dans la parabole cubique &c.

PROPOSITION VII.

PROBLEME.

154. TROUVER *le centre de percussion d'un espace parabolique* BAB *agité autour de sa base* BB. FIG. 124

Il est évident que les vîtesses seront entr'elles comme les rayons des arcs décrits par les parties de l'espace parabolique, & que ces rayons sont égaux aux $DP=a-x$, que l'on regarde comme le bras de la figure. Multipliant donc la différentielle des poids $x^{\frac{1}{2}}dx$ par $a-x$, on aura $ax^{\frac{1}{2}}dx - x^{\frac{1}{2}+1}dx$ = à la différentielle des momens laquelle étant encore multipliée par $a-x$, donnera pour celle des forces $aax^{\frac{1}{2}}dx - 2ax^{\frac{1}{2}+1}dx + x^{\frac{1}{2}+2}dx$, dont l'intégrale $= \frac{2}{3}aax^{\frac{1}{2}+1} - \frac{4}{5}ax^{\frac{1}{2}+2} + \frac{2}{7}x^{\frac{1}{2}+3} = \frac{70aax^{\frac{1}{2}+1} - 84ax^{\frac{1}{2}+2} + 30x^{\frac{1}{2}+3}}{105}$; ce qui étant divisé par la somme des momens $= \frac{10ax^{\frac{1}{2}+1} - 6x^{\frac{1}{2}+2}}{15}$, donnera $\frac{35aa-42ax+15xx}{35a-21x}$ pour la distance de l'axe de balancement BB au centre de percussion de l'espace $BMMB$, & $\frac{1}{7}a$ pour celle de l'espace entier BAB, parce que x devient $=a$.

PROPOSITION VIII.

PROBLEME.

FIG. 12. 155. TROUVER *généralement le centre de percuſſion d'un eſpace parabolique agité ſur ſa baſe.*

Les mêmes choſes étant poſées, on aura pour la différentielle des momens $a x^{\frac{1}{m}} dx - x^{\frac{1}{m}+1} dx$, & pour celle des forces $a a x^{\frac{1}{m}} dx - 2 a x^{\frac{1}{m}+1} dx + x^{\frac{1}{m}+2} dx$, dont l'intégrale $= \frac{m}{m+1} a a x^{\frac{1}{m}+1} - \frac{2m}{2m+1} a x^{\frac{1}{m}+2} + \frac{m}{3m+1} x^{\frac{1}{m}+3}$, & diviſant cette grandeur par $\frac{m}{m+1} a x^{\frac{1}{m}+1} - \frac{m}{2m+1} x^{\frac{1}{m}+2}$ = à la ſomme des momens, il viendra après les opérations néceſſaires, pour la diſtance de l'axe de balancement BB au centre de percuſſion de l'eſpace $BMMB$, $\frac{6m^3+5mm+1ma\,a-6m^3-8mm-2max+2m^3+3man+mxx}{6m^3+5mm+1ma-3m^3-4mm-mx}$; mais parce que P en D, x devient $= a$, cette grandeur ſe réduira à $\frac{2m}{3m+1} a$ qui ſera la diſtance cherchée du centre de percuſſion de l'eſpace entier à l'axe de balancement BB.

PROPOSITION IX.

PROBLEME.

FIG. 43. 156. TROUVER *le centre de percuſſion d'un cylindre ſuſpendu par une de ſes extremitez autour de laquelle il eſt balancé.*

Soit le cylindre AB ſuſpendu par ſon extremité A autour de laquelle il eſt agité. Il eſt évident que les viteſſes de toutes les petites parties égales de ce corps ſeront entr'elles à cauſe des tems égaux en même raiſon que les eſpaces par-

courus; c'eſt-à-dire comme les arcs qu'elles décrivent dans leur mouvement, & par conſéquent comme les rayons ou les diſtances du point de ſuſpenſion. Soit donc nommé l'axe AB du cylindre, a; ſa partie quelconque AP, x; la circonférence de ſa baſe, c; & ſon rayon r; on aura * pour la différentielle des momens $\frac{crxdx}{2}$, & pour celle des forces $\frac{crxxdx}{2}$, dont l'intégrale $=\frac{crx^3}{6}$, laquelle étant diviſée par la ſomme des momens $=\frac{crxx}{4}$, donnera $\frac{2}{3}x$ pour la diſtance de l'axe de balancement paſſant par A au centre de percuſſion de la partie du cylindre qui a pour hauteur AP, & $\frac{2}{3}a$ pour celle du cylindre entier, laquelle n'eſt pas différente de celle du centre de peſanteur du triangle. Et en effet à cauſe des poids égaux, les vîteſſes ſont entr'elles comme les droites qui rempliſſent un triangle; donc &c.

* Art. 112.

PROPOSITION X.

PROBLEME.

157. TROUVER *le centre de percuſſion d'un cylindre agité autour d'un point* R *de ſon axe prolongé.* FIG. 45.

Ayant nommé RB, a; RA, b; AP, x; donc $RP=b+x$; & $AB=a-b$, on aura pour la différentielle des momens $\frac{bcrdx+crxdx}{2}$: mais les vîteſſes des petits poids égaux du Solide ſont entr'elles comme les arcs décrits du point R par ces poids, ou comme les rayons ou diſtances du point R; ainſi les forces ſeront entr'elles comme les droites qui rempliſſent un trapeze décrit par le cylindre. Multipliant donc la différentielle des momens par $b+x$, on aura pour celle des forces $\frac{bbcrdx+2bcrxdx+crxxdx}{2}$, dont l'intégrale $=\frac{bbcrx}{2}+\frac{bcrxx}{2}+\frac{crx^3}{6}$ laquelle étant di-

viſée par la ſomme des momens $= \frac{bcrx}{2} + \frac{crxx}{4}$, donne $\frac{6bb+6bx+2xx}{6b+3x}$ pour la diſtance de l'axe de balancement paſſant par le point R au centre de percuſſion de la partie qui a pour hauteur AP agitée autour de ce point, & $\frac{2aa+2ab+2bb}{3a+3b}$ pour celle du cylindre entier, parce qu'alors x devient $= a - b$. Ainſi il eſt facile de connoître par quel endroit d'un bâton l'on doit frapper pour donner le plus grand coup qu'il ſoit poſſible, en ſuppoſant que AR répréſente le bras d'un homme, & AB le bâton qui frappe.

PROPOSITION XI.

PROBLEME.

FIG. 9. 158. TROUVER *le centre de percuſſion d'un cone balancé autour de ſon ſommet* A.

Les mêmes choſes étant poſées que dans l'*article* 129, on aura pour la différentielle des momens $\frac{crx^3dx}{2aa}$, & pour celle des forces $\frac{crx^4dx}{2aa}$, dont l'intégrale $= \frac{crx^5}{10aa}$ laquelle étant diviſée par la ſomme des momens $= \frac{crx^4}{8aa}$, donnera $\frac{4}{5}x$ pour la diſtance de l'axe de balancement paſſant par le point A au centre de percuſſion de la partie du cone qui a pour hauteur AP, & $\frac{4}{5}a$ pour celle du cone entier, laquelle n'eſt pas différente de celle du centre de peſanteur du complement d'une parabole cubique, parce que les forces ſont comme les droites qui rempliſſent ce complement.

Il ſeroit facile d'avoir auſſi le centre de percuſſion de ce cone s'il étoit balancé autour d'un point de ſon axe prolongé au delà de ſon ſommet, les vîteſſes ſeroient proportionnelles aux diſtances de ce point, & les forces ſeroient comme les droites qui rempliſſent un triligne compoſé du complement d'une parabole ordinaire, & de celui d'une parabole cubique.

PROP. XII.

PROPOSITION XII.

PROBLEME.

159. TROUVER *le centre de percuſſion d'un cone agité par ſa baſe.*

Les vîteſſes ſeront entr'elles comme les $DP = a - x$, multipliant donc la différentielle des momens $= \frac{acrxxdx - crx^3dx}{2aa}$, par $a-x$, on aura pour celle des forces $\frac{aacrxxdx - 2acrx^3dx + crx^4dx}{2aa}$, dont l'intégrale $= \frac{crx^3}{6} - \frac{crx^4}{4a} + \frac{crx^5}{10aa} = \frac{10aacrx^3 - 15acrx^4 + 6crx^5}{60aa}$ en donnant un commun dénominateur, ce qui étant diviſé par la ſomme des momens $= \frac{4acrx^3 - 3crx^4}{24aa}$, donne $\frac{20aa - 10ax + 11xx}{20a - 15x}$ pour la diſtance de l'axe de balancement BC au centre de percuſſion du cone tronqué qui a pour hauteur DP, & $\frac{2}{3}a$ pour celle du cone entier, parce qu'alors x devient $= a$. FIG. 91

PROPOSITION XIII.

PROBLEME.

160. TROUVER *le centre de percuſſion d'une ſphére par rapport à l'axe de balancement* AK *perpendiculaire ſur* AD.

Les mêmes choſes étant poſées que dans l'*article* 130. on aura pour la différentielle des momens $cxxdx - \frac{cx^3dx}{2r}$, & pour celle des forces $cx^3dx - \frac{cx^4dx}{2r}$, dont l'intégrale $= \frac{cx^4}{4} - \frac{cx^5}{10r}$ laquelle étant diviſée par la ſomme des momens $= \frac{cx^3}{3} - \frac{cx^4}{8r}$, donne $\frac{30rx - 12xx}{40r - 15x}$ pour la diſtance de l'axe de balancement aux centre de percuſſion de la partie de ſphere qui a pour hauteur x, & $\frac{6}{5}r$ FIG. 181

pour celle de la ſphere entiere, parce que x devient $= 2r$.

Il ſera facile de trouver le centre de percuſſion de la moitié de la ſphere ou d'un de ſes ſegmens quelconque.

PROPOSITION XIV.

PROBLEME.

161. TROUVER *le centre de percuſſion d'un Conoïde parabolique balancé autour de l'axe* TT *paſſant par le ſommet* A. FIG. 12.

Les mêmes choſes étant poſées que dans l'*art.* 131. on aura pour la différentielle des momens $\frac{cvxdx}{2r}$, & pour celle des forces $\frac{cx^3dx}{2r}$, dont l'intégrale $= \frac{cx^4}{8r}$, laquelle diviſée par $\frac{cx^3}{6r}$, donne $\frac{3}{4}x$, & de là $\frac{3}{4}a$ pour la diſtance cherchée de l'axe de balancement TT au centre de percuſſion du conoïde.

PROPOSITION XV.

PROBLEME.

162. TROUVER *généralement, le centre de percuſſion des ces ſortes de Solides.*

Les mêmes choſes étant poſées que dans l'*art.* 132. on aura pour la différentielle des momens $\frac{cx^{\frac{2}{m}+1}dx}{2r}$, & pour celle des forces $\frac{cx^{\frac{2}{m}+2}dx}{2r}$, dont l'intégrale $= \frac{mcx^{\frac{2}{m}+3}}{6m+4r}$ laquelle étant diviſée par la ſomme des momens $= \frac{mcx^{\frac{2}{m}+2}}{4m+4r}$, donnera $\frac{2m+2}{3m+2}x$, & de là $\frac{2m+2}{3m+2}a$ pour la diſtance cherchée.

PROPOSITION XVI.

PROBLEME.

163. TROUVER *le centre de percuſſion d'un ſphéroïde elliptique par rapport à l'axe de balancement* B B *paſſant par* A *perpendiculairement ſur le diametre* A D. FIG. 51.

Les mêmes choſes étant poſées que dans l'*art.* 145. on aura pour la différentielle des momens $\frac{2acrxxdx - crx^3dx}{2aa}$ & pour celle des forces $\frac{2acrx^3dx - crx^4dx}{2aa}$, dont l'intégrale $= \frac{crx^4}{4a} - \frac{crx^5}{10aa}$, laquelle diviſée par la ſomme des momens $= \frac{crx^3}{3a} - \frac{crx^4}{8aa}$, donne $\frac{10ax - 12xx}{40a - 15x}$ pour la diſtaces de l'axe de balancement *B B* au centre de percuſſion de la partie du ſphéroïde qui a pour hauteur x, & $\frac{6}{5}a$ pour celle du ſphéroïde entier. Ce qu'il falloit trouver.

Ces exemples ſont pluſque ſuffiſans pour faire voir comment on peut appliquer le Calcul intégral aux Centres de percuſſion. Car de quelque figure que ſoit un corps en mouvement, & en quelque endroit que l'on ſuppoſe le centre de balancement, il faudra toujours prendre le produit de la différence des momens par les vîteſſe afin d'avoir la ſomme des forces. Et ſi on conſidére toutes ces forces comme des corps peſans attachez à un levier, il n'y a qu'à chercher leur centre de percuſſion de la même maniére qu'on a trouvé le centre de peſanteur. Car le centre de percuſſion eſt le centre d'équilibre non des poids ſeulement, mais des poids en mouvement, de ſorte que ſi on ſoutenoit ce levier par ce point, on ſoutiendroit en même tems toutes ces forces: car de même que l'on conſidére le corps peſant comme ſi toutes ſes parties étoient réünies dans le centre de peſanteur; de même auſſi le corps en mouvement doit être regardé comme ſi toutes ſes forces étoient ramaſſées dans le centre de percuſſion.

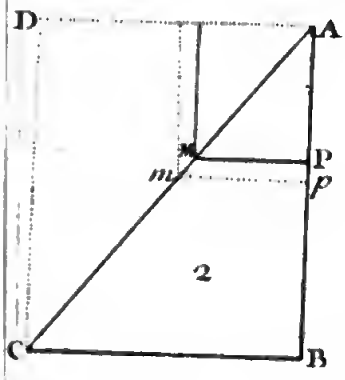
ON peut tirer de-là une Méthode pour trouver le Cen-

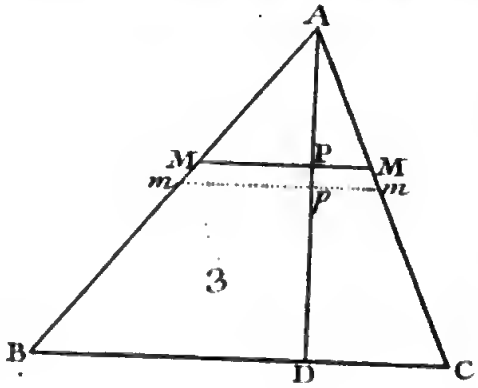
tre d'Oſcillations. Car le centre d'Oſcillation d'une figure quelconque eſt un point dont la diſtance de l'axe de balancement eſt égale à la longueur d'un pendule ſimple, c'eſt-à-dire d'un corps ſuſpendu à un fil inflexible, & dont on conſidére toutes les forces de ſes parties comme ramaſſées en un point, & dont les vibrations ſeroient iſochrones à celles de la figure. Ainſi de quelque figure que ſoit un pendule ou un corps ſuſpendu, on le conſidere toujours n'ayant de longueur qu'autant qu'il y a de diſtance du point de ſuſpention au centre de percuſſion. Par exemple ſi on agitoit un Conoïde parabolique ſuſpendu par ſon ſommet, & dont on a trouvé la diſtance du centre de percuſſion égale aux $\frac{3}{4}$ de ſon axe, & qu'on voulut avoir un pendule ſimple qui fit ſes vibrations en tems égaux avec le Conoïde, il faudroit prendre ſa longueur telle qu'elle fut à la hauteur du Conoïde comme 3 à 4. Car l'on voit évidemment que ces deux pendules ſeroient iſochrones, puiſque le centre des forces de l'un & de l'autre ſeroit également diſtant du point de ſuſpenſion. Il en eſt ainſi des autres figures,

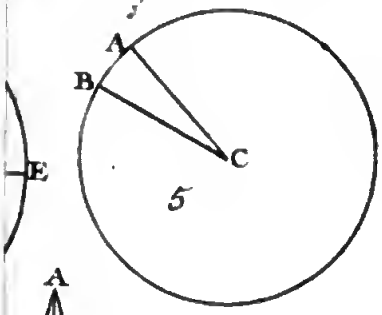
Il ſeroit très-facile comme l'on voit de groſſir cet Ouvrage; & de lui donner l'étendue d'un juſte volume, en appliquant la méthode à un plus grand nombre de queſtions: mais comme ce ſeroit preſque toujours répéter la même choſe, le Lecteur n'en deviendroit gueres plus habile, de plus il faut lui laiſſer le plaiſir de l'appliquer lui-même. Ainſi on a jugé à propos d'en demeurer là.

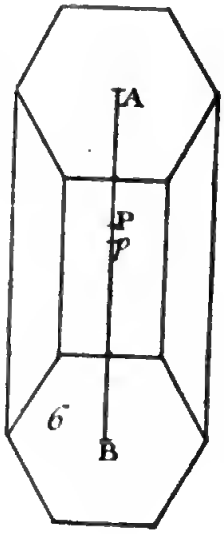
FIN.

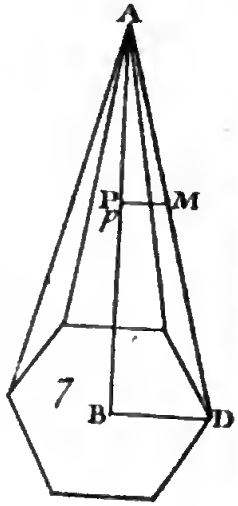
641026

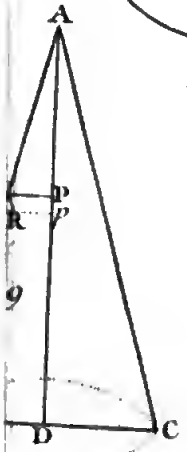

D
A
M
P
m
p
2
C
B

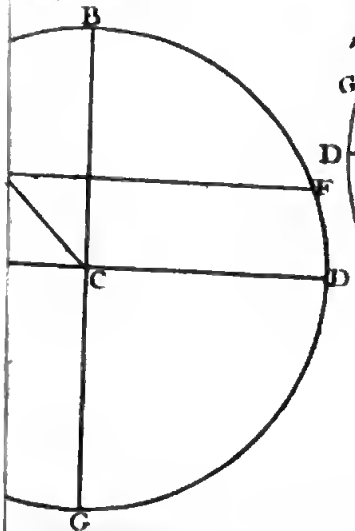

A
M
P
M
m
m
p
3
B
D
C

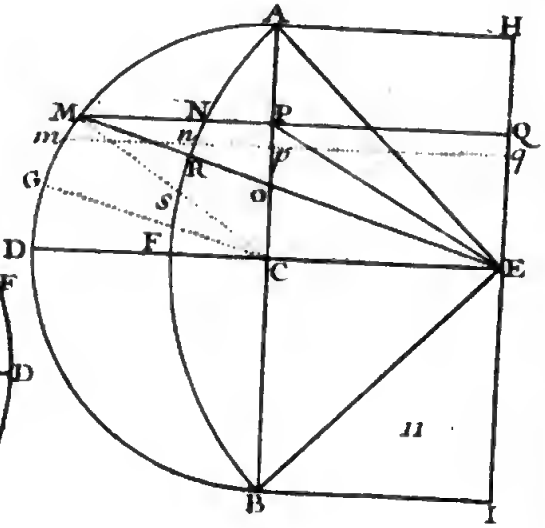

A
B
C
5

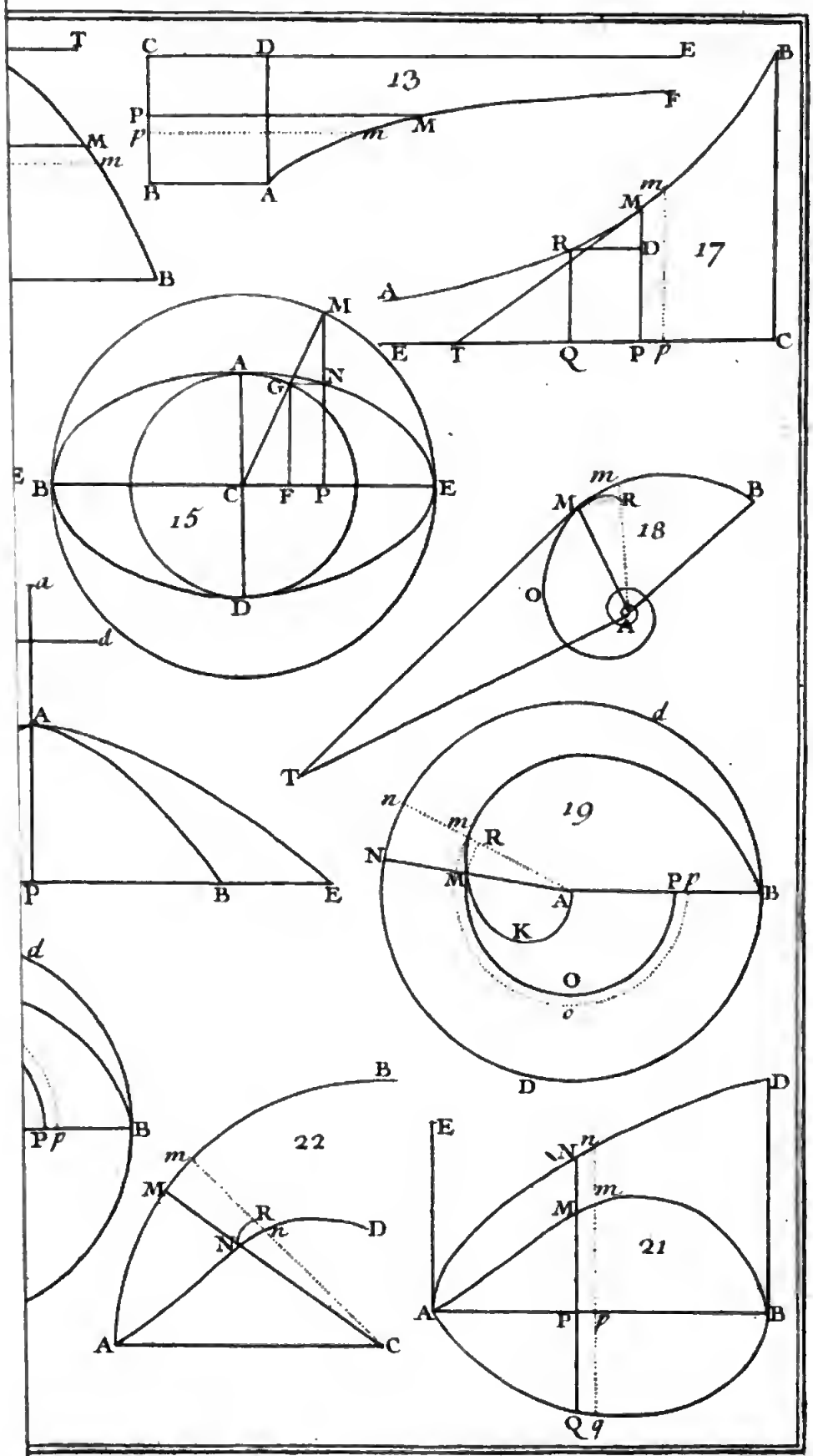

A
P
p
6
B


A
P
M
p
7
B
D

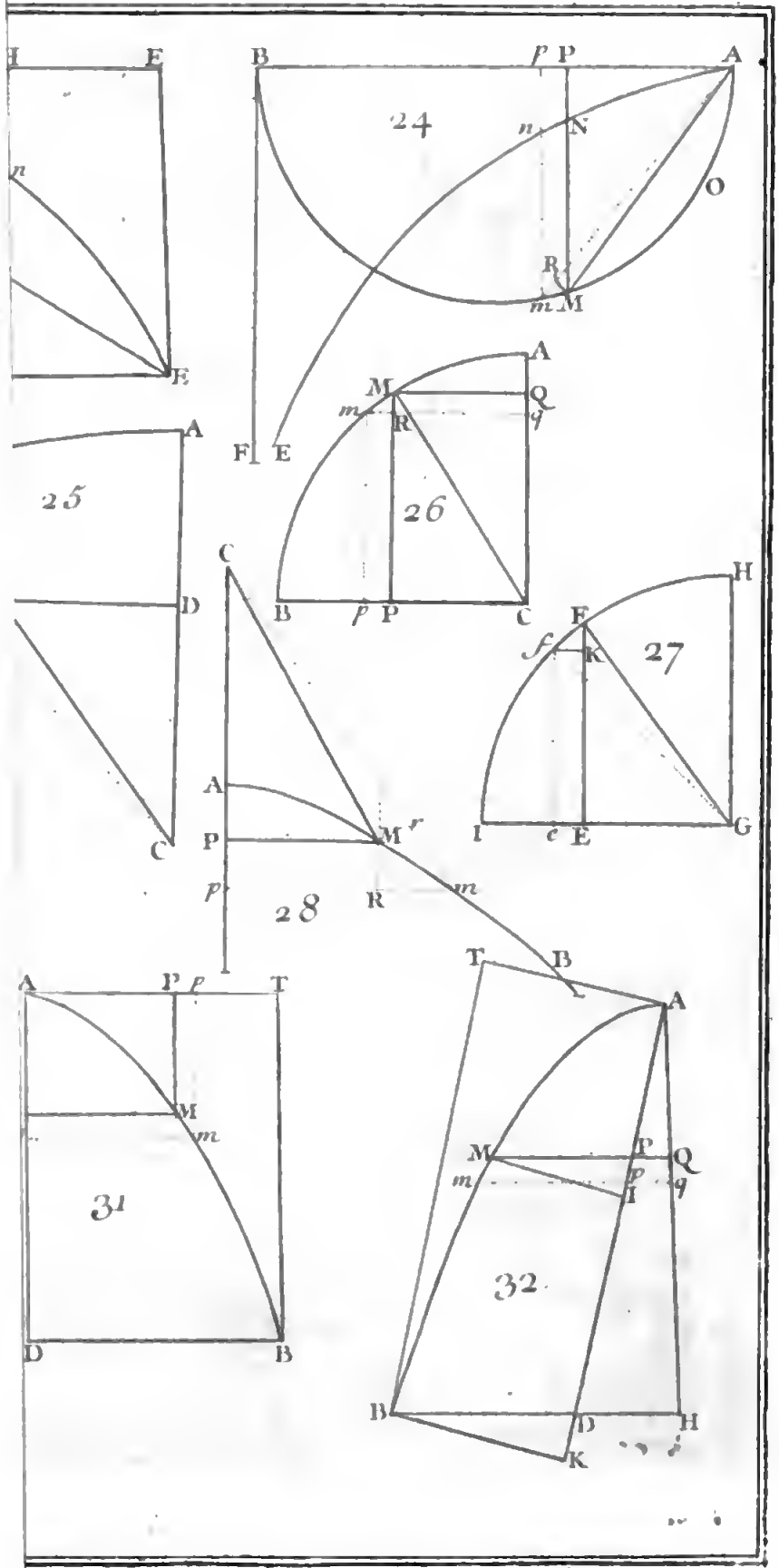

A
P
R
p
9
D
C


B
F
C
D
G


A
H
M
N
P
Q
m
n
p
q
R
G
S
O
D
F
C
E
11
B
I

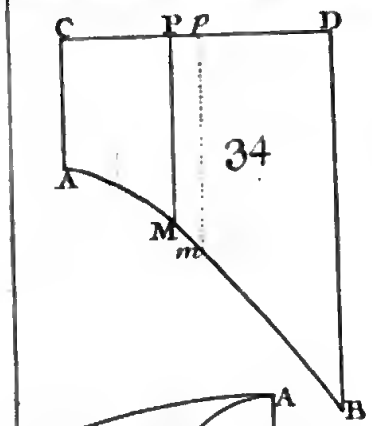

T
M
m
B
C
D
E
13
P
p
F
m
M
B
A
B
m
M
R
D
17
A
E
T
Q
P
p
C
M
A
N
G
B
C
F
P
E
15
D
m
M
R
B
18
O
A
a
d
A
P
B
E
T
d
n
m
19
R
N
M
A
P
p
B
K
O
o
D
d
P
p
B
B
22
m
M
R
n
D
N
A
C
E
N
n
m
M
21
A
P
p
B
Q
q
D

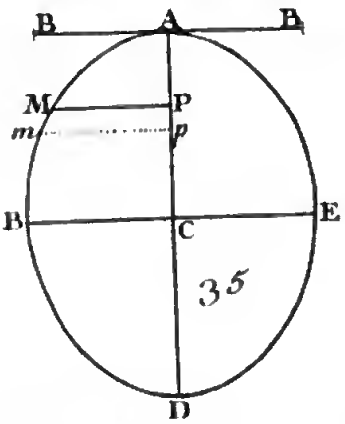
Digitized by Google

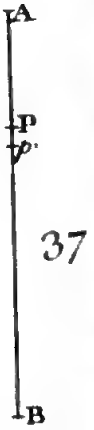

H
E
n
E
B
p
P
A
24
n
N
O
R
m
M
F
E
A
M
Q
m
R
q
26
25
D
C
B
p
P
C
C
A
P
M
r
p
R
m
28
F
H
f
K
27
I
c
E
G
T
B
A
M
P
Q
m
p
I
q
32
B
D
H
K
A
P
p
T
M
m
31
D
B

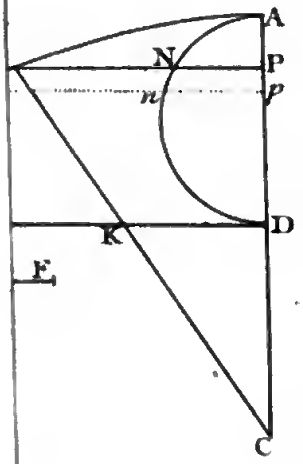
V. E. III — Bibliothèque Nationale
N.NOU

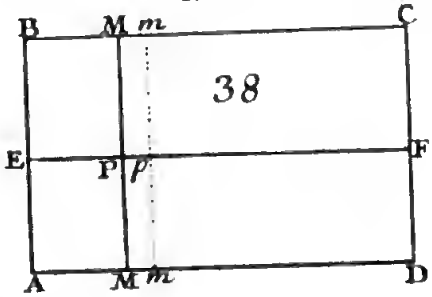
Digitized by Google

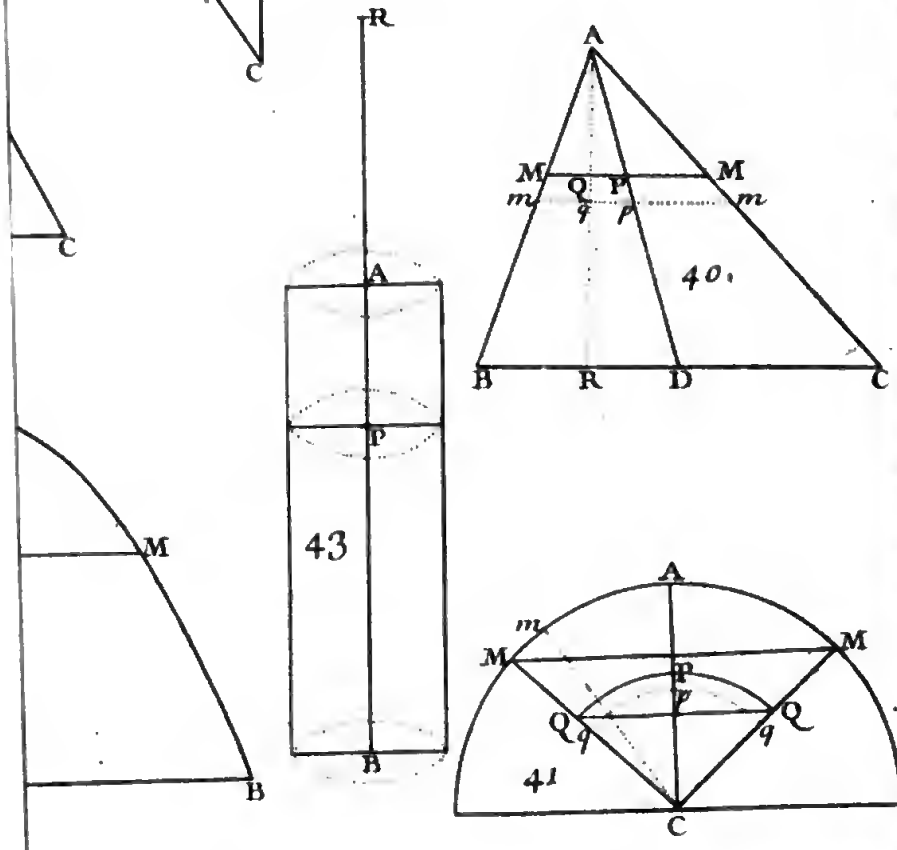












Digitized by Google

9 th. 114 rm. cavl: